Estructura de la materia 4

Segundo Cuatrimestre de 2018

Práctica 5: Ecuaciones de onda relativistas: Dirac y Klein-Gordon

A pesar de que los intentos por construir una mecánica cuántica relativista para un sistema con un número fijo de partículas no funcionaron, el estudio de las ecuaciones de onda invariantes de Lorentz (Dirac y Klein-Gordon) es fundamental para construir e interpretar el modelo estandard desarrollado en el marco de una teoría cuántica de infinitos grados de libertad.

Nota: Para esta guía es fundamental entender la notación de índices de relatividad especial.

1. Considere la ecuación de Klein-Gordon para un campo ϕ complejo:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

   a) Considerando la solución $e^{\pm ik\cdot x}$ (con $k\cdot x \equiv k^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = k^\mu x_\mu$), halle la relación de dispersión que debe cumplir k^μ. Despeje $\omega(k) \equiv k^0$ (definido positivo) en términos de k^i.

   b) En los intentos por pensar a ϕ como funciones de onda, los autovalores de $i\partial_\mu$ se interpretarían como el cuadrimomento del estado. Halle estos autovalores con su signo adecuado para las soluciones de onda plana anteriores, identificando las soluciones de energía positiva y negativa con $e^{\pm ik\cdot x}$

   c) Muestre que en el límite no relativista, $\psi \equiv e^{+imt} e^{-ikx}$ verifica aproximadamente la ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m. Por qué es necesario el factor e^{+imt}?

2. Dadas las matrices

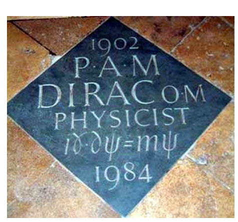
$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac del álgebra de Clifford.). Escriba explícitamente algunas de esas relaciones para entender lo que significan.

3. Sea la ecuación de Dirac



o escrita en forma más explícita,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

a) Proponiendo una solución del tipo

$$\psi(x) = e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left(\begin{array}{c}\xi\\ \phi\end{array}\right), \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

reescriba explícitamente la ecuación de Dirac como dos ecuaciones para ξ y ϕ (objetos de dos componentes quienes no dependen de las coordenadas). Note que son ecuaciones algebraicas lineales acopladas. Repita proponiendo la fase compleja conjugada y verifique que cumplen también la ecuación de Klein-Gordon.

b) Halle las 4 soluciones en reposo ($i\partial_j\psi = 0$) linealmente independientes:

$$u^{(1)},\ u^{(2)},\ v^{(1)},\ v^{(2)}$$

junto a sus respectivas dependencias temporales.

c) A partir de $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger\psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$ o en forma compacta: $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, y usando la ecuación de Dirac, muestre que se satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\,\vec{J}_{Dirac} = 0$$

4. Verificar que las siguientes expresiones con soluciones de la ecuación de Dirac con momento arbitrario:

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-i\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega+m}\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)\end{array}\right), \quad u_2 = e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega+m}\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\end{array}\right),\\ v_1 &= e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left(\begin{array}{c} \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega+m}\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)\\ 1\\ 0\end{array}\right), \quad v_2 = e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left(\begin{array}{c} \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\omega+m}\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\\ 0\\ 1\end{array}\right)\end{aligned}$$

5. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

6. Momento angular total:

a) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$i\partial_t\psi = H\psi$$

b) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \left(\begin{array}{cc}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{array}\right)$$

c) Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm\hbar/2$ en unidades anti-naturales).

7. A fin de incluir la interacción con el campo electromagnetico, una modificación (invariante relativista) de la ecuación de Dirac es:

$$(\gamma^\mu(i\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\Psi = 0$$

Notando que $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ y considerando un espinor con autovalor E (positivo) de $i\partial_0$, muestre que en el límite no relativista y de campos electromagneticos débiles ($\phi << E \approx m$) las componentes inferiores del espinor pueden despejarse algebraicamente en términos de las superiores y estas últimas (ψ) satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + q\Phi - g\frac{q}{2m}\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\,\vec{B}\right)\psi = E\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón. Si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

8. El espinor de Dirac transforma con una matriz S_Λ ante transformaciones Λ del grupo de Lorentz (es decir, rotaciones y boosts). S_Λ se obtiene exponenciando los generadores $\Sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ (que forman cierta representación del álgebra de Lorentz). Es decir, la transformación del espinor se obtiene mediante $S_\Lambda \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}$, donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros (antisimétricos en $\alpha\beta$) de la transformación de Lorentz: ω_{ij} parametrizan una rotación en el plano ij y ω_{0i} parametriza un boost a lo largo del eje i

   a) Halle la expresión explícita de los generadores Σ para el caso de una rotación en torno a un eje genérico (usando el ejercicio 2).

   b) Idem para el caso de un boost.

9. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \to \psi'(x') = S_\Lambda\psi(x)$ siendo S la matriz definida previamente. Tomando por válida la igualdad $S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ (ver referencias para esto), muestre que

   a) $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

   b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

   c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.

   d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector.

10. Muestre que para una solución genérica de la ecuación de Dirac ψ, $\tilde{\psi}$ definida como $\tilde{\psi}(t, \vec{x}) = \psi(t, -\vec{x})$ no es solución. Muestre que $\gamma_0\tilde{\psi}$ sí es solución. Esto motiva la definición de la operación paridad $\mathcal{P}$ definida como $\mathcal{P}\psi = \gamma_0\psi \circ I$ siendo I la operación de inversión espacial. Verifique que las cantidades definidas en el ejercicio anterior tienen el comportamiento adecuado ante paridad.

11. Una noción importante relacionada con paridad es la de *quiralidad*. El espinor de Dirac de 4 componentes se puede pensar como suma de dos espinores que tienen una *quiralidad definida*. Definiendo $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, muestre que:

a) γ_5 es hermítico, de cuadrado unitario, y anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

b) Muestre que los operadores $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ son proyectores: $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$, $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, $P_+ + P_- = 1$. Muestre además que P_+y P_- proyectan sobre los autoespacios de autovalores $+1$ y -1 de γ_5 respectivamente, denominados de quiralidad *Right* y *Left*.

c) Muestre que la operación paridad convierte un espinor izquierdo (autovector de γ_5 con autovalor -1) en uno derecho (autovector de γ_5 con autovalor $+1$) y viceversa.

12. Definiendo $\psi_R = P_+\psi$ y $\psi_L = P_-\psi$, muestre que:

    a) la ecuación de Dirac en el caso masivo puede escribirse como dos ecuaciones acopladas para ψ_R y ψ_L

    b) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R. Como consecuencia de lo anterior, muestre que para un espinor de masa cero es posible tener soluciones de quiralidad definida.

13. Muestre que:

    a) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.

    b) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

14. Muestre que el operador de helicidad $\hat{h} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma}.\hat{P}$ con ($\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|$), que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$. Ayuda: haga actuar el conmutador sobre una base de autoestados de $\vec{P}$.

15. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir

$$\frac{1}{2}\gamma^5 u(\vec{p}) = \hat{h}u(\vec{p}).$$

    Por otro lado, verifique que para las soluciones de tipo v (antipartículas) quiralidad y helicidad son opuestas

$$\frac{1}{2}\gamma^5 v(\vec{p}) = -\hat{h}v(\vec{p}).$$

16. La helicidad de una partícula masiva no es un concepto invariante de Lorentz. Mas especificamente, no es invariante ante boost. Para una particula de masa cero, sin embargo, lo es. A fin de ver esto:

    a) Argumento, de forma heuristica, que para una particula masiva es posible hallar un cambio de sistema de referencia tal que la velocidad de la partícula cambie de signo pero no asi su rotación intrinseca.

    b) Usando la identificación de h con γ_5 para el caso sin masa, muestre que γ_5 conmuta con $S(\Lambda)$ y por tanto la helicidad es invariante de Lorentz.