

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4  
 SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2018  
 PRÁCTICA 7A: TEORÍAS DE GAUGE (CASO ABELIANO)

Gauge symmetry is not a symmetry..A better phrase is Gauge redundancy

Nathan Seiberg

1. 🐰 Considere la acción de un campo de Klein-Gordon complejo:

$$L = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (1)$$

- (a) Verifique que el lagrangiano no queda invariante ante la transformación  $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$ , siendo  $\alpha$  una función arbitraria del espacio-tiempo. Es decir, verifique que este lagrangiano no tienen *invariancia local* ante  $U(1)$ .
- (b) Considere ahora una modificación del caso anterior, en el que el campo escalar interactúa con otro campo cuadvectorial  $A_\mu$  :

$$L_{gauge} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi +$$

teérminos con  $A_\mu$  donde  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ , con  $g$  una constante. Halle la forma en que debe transformar  $A_\mu$  (transformación de gauge) para que el primer término de este lagrangiano quede invariante para todo  $\alpha$ .

- (c) Para esa transformación hallada, muestre que este tensor  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  resulta ser invariante. Esto permite proponer un término cinético para  $A_\mu$  de la forma  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , *invariante de gauge*. Diga porque este término no describe interacciones para el campo  $A_\mu$ .
- (d) Verifique que un término de masa para el foton (la partícula asociada a  $A_\mu$ ) :  $m^2 A_\mu A^\mu$  rompe esta invariancia local.
- (e) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano completo así obtenido, invariante ante  $U(1)$ -local:

$$L_{gauge} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

y verifique que  $g$  hace las veces de "carga eléctrica", comparando estas ecuaciones con las de Maxwell con una fuente  $j^\mu$  e identificando  $A_\mu$  con el campo de Maxwell.

2. Considere el Lagrangiano anterior con la adición de un término  $\lambda(\phi^* \phi)^2$ .

- (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción. Para ello, expanda el primer término diferenciando el término cinético del campo escalar y los términos cúbicos y cuárticos de interacción.

- (b) Si llamamos  $h$  y  $\bar{h}$  a la partícula y antipartícula que surge de la cuantización del campo  $\phi$ , dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula  $h + \bar{h} \rightarrow h + \bar{h}$ . Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas. Especifique la potencia de  $g$  con la que viene pesado el diagrama.

3. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

siendo  $D_\mu = \partial_\mu - eA_\mu$  ( $e$  es el modulo de la carga electrica del electrón). El modelo que resulta de cuantizar esta lagrangiano es lo que se conoche como QED (quantum electrodynamics). La simetría ante  $U(1)$  local es exactamente la del caso escalar.

- (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.  
 (b) Dibuje los diagrams de Feynman, al orden arbol (es decir, sin loops) y al orden mas bajo en  $e$ , para los procesos:  
 $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ ,  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ .  
 (c) Para el scattering de fotones  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , halle el diagrama al orden mas bajo, permitiendo incluir loops.

4. Un Lagrangiano con invariancia  $U(1)$ , requiere un solo campo de gauge (llamemoslo  $A_\mu$ , aunque este lagrangiano contenga varios campos escalares o de Dirac acoplados a  $A_\mu$ . A fin de ilustrar esto:

- (a) Escriba el Lagrangiano invariante  $U(1)$  local que describe a dos campos de Dirac acoplados con  $A_\mu$ , siendo sus constantes de acoplamiento  $q_1$  y  $q_2$ .  
 (b) Reescriba este lagrangiano organizando los dos campos de Dirac en un doblete  $\Psi$ . Muestre que la expresión de la derivada covariante puede reescribirse de esta forma:  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu Q$ , con  $Q \equiv \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$  y que la transformación de gauge puede escribirse en la forma:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha(x)Q}\Psi \quad (2)$$

- (c) Justifique porque sigue teniendo sentido decir que este Lagrangiano es invariante ante  $U(1)$ , a pesar de que la transformación se implemente via una matriz de  $2 \times 2$ .