TENSORES PARA GENTE APURADA

En muchas problemas de la física uno suele sacar provecho de la ventaja de recurrir a cierto sistema de coordenadas para realizar un calculo, conociendo como ese resultado puede traducirse a otro sistema de mayor interés. Ya desde física 1 nos hemos encontrado en situaciones como esa, como cuando nos paramos en un sistema acelerado para hacer un calculo que luego lo traducimos al sistema inercial. En el caso de la fisica relativista, tenemos muchisimos ejemplos como estos. Ya en el caso de un problema matematico como el de resolver una ecuación diferencial en varias variables es bién conocido el uso de sistemas de coordenas diferentes (coordenadas esfericas, polares, cartesianas). Contamos con un conocimiento intuito que nos permite movernos de un sistema a otro, traduciendo los resultados adecuadamente. Mas aún, nociones importantes como la de simetría de un conjunto de leyes (como la simetria de Galileo, o la relativista) se formulan en terminos de "invariancia de las ecuaciones frente a un grupo de cambios de coordenadas".

A fin de dar una idea un poco mas precisa del los temas de los que nos ocuparemos en estas notas pragmaticas, tengamos en cuenta que muchos sistemas fisicos los describimos los como un espacio D dimensional de variables reales, utilizando un R^D o alguna porción de este. Pero puede resultar conveniente usar en vez de las D upla $(x^1, x^2, ...x.)$ canonicas de este R^D de partida, alguna otra elección, $y^1(x), y^2(x), ...y^D(x)$, siendo las yÂ´s funciones (con alguna propiedad de suavidad adecuadas) de las coordenadas originales x . La teoría matemática que esta detrás del problema de hallar aquellas cosas que no cambian al pasar de un sistema de coordenadas a otro y de ciertos objetos que cambian de una manera definida, se conoce como *geometría diferencial*, cuyo objetivo es mucho mas profundo que este objetivo banal.

Le geometría diferencial va mucho mas alla al considerar conjuntos mas generales que un R^D, denominados *variedades diferenciales*, que pueden describirse por parches con abiertos de R^D. No hace falta ir muy lejos para toparse con ejemplos no triviales de esto; basta considerar la superficie de una esfera en R^3. Esta superficie de dimensión 2 no se puede describir con solo dos numeros reales de un abierto de R^2, si queremos que estos la parametricen de forma biunivoca y con cierta suavidad. Se puede ver que nesitaremos al menos dos abiertos, llamados *cartas*, cada una de los cuales cubre una parte de la superficie. Por ejemplo, el hemisferio superior y el inferior.

En estas notas no nos ocuparemos de esa última cuestión general sino solo de R^D y la cuestión banal de los cambios que surgen al describir algunas cosas (tensores) en R^D usando ciertos sistemas de coordenadas relacionadas entre si por:

1. Transformaciones generales (seccion I)

2. Transformaciones especiales que preservan una forma cuadratica especifica(seccion II).

Aún si solo nos interesa el caso de las transformaciones especiales del grupo de Lorentz (en sección II), la primera parte, al poner la idea de tensor en un contexto mas general, puede ayudar a entender de una manera más unificada las consideraciones de la segunda parte.

Si un matematico lee estas notas, tenga en cuenta que, como ya se menciono, no se afirma aquí que la geometría diferencial se limite a esta cuestión superficial y pragmática. Pero sin duda, todas las reglas prácticas de transformación de componentes de tensores y construcción de invariantes que consideraremos tienen su trasfondo en geometría diferencial, a la cual alguén podria recurrir si deseara profundizar.

1 I. Transformaciones generales de coordenadas

1.1 Tensores de rango 1 covariantes y contravariantes

La noción de tensor de rango N , de tipo covariante o contravariante, surge de dos casos simples que consideraremos a continuación.

Para el primer caso, consideremos una curva en R^D que como tal se describe a partir de D funciones $f^\mu : I \to R^D$ (con $\mu = 1...D$) de un parametro real τ que vive en un intervalo I , de tal forma que un punto de la curva tiene coordendas $x^\mu = f^\mu(\tau)$. En cada punto de esta curva puede tomarse la derivada de f^μ respecto al parámetro de la curva que denotaremos por simplicidad como $\frac{dx^\nu}{d\lambda}$ (entendiendo que las x^μ son funciones de τ; aunque no lo parezca, hay en esta notación un abuso que podria ocultar el hecho de estas D derivadas tienen sentido dado que hemos fijado una curva).

Para cada punto de R^D por el que pase esta curva, esta colección de D numeros forma las componentes de un *tensor de rango 1 contravariante* o simplemente un vector. La aparatosidad del primer nombre se comprendera enseguida. Note ya que no hemos definido que es el vector pero hemos dicho que estos números son sus componentes. Este nfoque tan pragmatico despertaría la perplejidad de cualquier estudiante de matematica. Volveremos sobre este punto.

Si bién la curva es un conjuntos de puntos determinado, que podriamos pintar, y todos los sistemas de coordenadas estarian de acuerdo en su parametrización (dado que a cada τ le corresponde un punto) no todos estarían de acuerdo en que coordenadas tiene cada punto y tampoco en cuanto valen estos D numeros $\frac{dx^\nu}{d\lambda}$. Si utilizamos otras coordenadas, dadas por $y^\mu = f^\mu(x)$ (con f^μ una coleccion de funciones infinitamente derivables que determinen un mapa invetible entre las x's y las y), como se relacionaran las nuevas cantidades $\frac{dy^\mu}{d\tau}$ respecto a las viejas? Basta usar la regla de la cadena para saberlo:

Transformación de vector contravariante o tensor contravariante de tipo 1

$$\boxed{\frac{dy^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{1}$$

Usaremos en estas notas la convención de que indices repetidos (es decir, con la misma letra) estan sumados sobre todo su rango $\mu = 1...D$. De nuevo, en $\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ se entiende que las y's son funciones de las x''s determinadas por las fs. Note que las componentes del nuevo vector, en un punto dado, se obtienen como una combinacion lineal de las del viejo. Los coeficientes $\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ desde ya dependen del punto en cuestión, dado que las f^μ no son necesariamente funciones lineales (lo serán en la sección II).

Este es el primer tipo de tensor con el que nos topamos en física. Aparece naturalemente en la física Newtoniana cuando describimos la velocidad de una partícula. En ese caso τ es el tiempo y la velocidad resulta ser un vector en este sentido que definimos.

Por otro lado, tenemos el caso de un segundo tipo de entidad, que aparece al considerar no una curva sino una función ϕ de R^D en los reales. Podemos calcular en un dado sistema las derivadas parciales respecto a cada coordenada (es decir, sus gradientes) y comparar esta colección de números con la obtenida en otro. En este caso obtenemos:

Transformación de vector covariante o tensor contravariante de tipo 1

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}} \tag{2}$$

Notese la diferencia con el vector: para la regla de transformación del gradiente, estamos usando los coeficientes de la matriz Jacobiana inversa y además estamos sumando el indice de fila de esa matriz y no el de columna. Si armamos la matriz H de coeficientes $H^{\mu}{}_{\nu} \equiv \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ (siendo μ el indice de fila y ν el de columna, posicionados arriba y abajo solo por convención), puede apreciarse mejor la diferencia entre las dos leyes de transformacion anteriores:

$$\frac{dy^{\mu}}{d\lambda} = H^{\mu}{}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^{\mu}} = (H^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \tag{4}$$

De esta forma se ve que las componentes del primer y segundo objeto transforman multiplicandose con matrices que son una la *inversa transpuesta* de la otra.

Observaciones:

1. La manera en que se piensa en geometría diferencial ambos tipos de objetos es diferente de la anterior, aunque la regla practica de transformacion de sus componentes es la mencionada.

2. El vector contravariante se piensa como un *operador diferencial* que corresponde a derivar respecto a τ.

3. Lo que hemos llamado vector covariante es el lenguage de geometria diferencial lo que se denomina *1-forma* y se lo piensa como una funcion que actua en los vectores, pensados estos últimos como operadores diferenciales.

Estas aclaraciones las hacemos para anticiparles que incluso en esta instancia preliminar encontraran diferencias en las definiciones. El punto crucial es que *se define* lo que son ambos objetos y de esa definición se desprende lo que son sus componentes y como transforman. Nosotros nos conformaremos con saber como transforma las componentes de algo que no hemos definido!.

Los dos tipos de objeto de la subsección anterior permiten definir un tensor de rango 1 de tipo contravariante o covariante copiando la forma en que transforman estos. Cualquier otra colección de D números que se comporte de alguna de las dos maneras anteriores ante cambios de coordenadas sera un tensor de rango 1 contravariante o covariante, respectivamente.

1.2 tensores de rango generico covariantes y contravariantes

Adoptando la definción de esos dos tipos basicos de tensores o, mejor dicho, habiendo descripto como se cambian sus componentes ante cambios de coordenadas, podemos deducir las propiedades de transformación de objetos mas complejos armados a partir de estos.

Por ejemplo, se puede definir un objeto con dos indices multiplicando las componentes del vector contravariante anterior. Haciendo $V^{\mu} \equiv \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$, podemos construir un nuevo objeto de componentes $W^{\mu\nu} \equiv V^{\mu}V^{\nu}$. Este sería un ejemplo de un tensor contravariante de rango 2, cuya ley de transformación se deduce de la del vector de componentes V^{μ}:

$$W'^{\mu\nu} = H^{\mu}{}_{\sigma}H^{\nu}{}_{\rho}W^{\rho\sigma} \tag{5}$$

El tilde indica que estamos evaluando estos números en el sistema transformado (el de las y's). Note que hay ahora una doble sumatoria en ρ y σ. Como en el caso del vector, se considera tensor de rango 2 a cualquier cosa de dos indices que transforme como en 5 .

Extendiendo el producto a mas de dos vectores contravariantes, podemos definir tensores de rango N contravariantes. Analogamente para el caso de tensores covariantes. En general, un tensor W de tipo $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$ tendria N indices de tipo contravariante y M de tipo covariante y transformara como:

$$W'^{\mu_1 \ldots \mu_N}_{\nu_1 \ldots \nu_M} = H^{\mu_1}{}_{\sigma_1} \ldots H^{\mu_N}{}_{\sigma_N} (H^{-1})^{\alpha_1}{}_{\nu_1} \ldots (H^{-1})^{\alpha_M}{}_{\nu_M} . W^{\sigma_1 \ldots \sigma_N}_{\alpha_1 \ldots \alpha_M} \tag{6}$$

En particular, una función de $R^D \to R$ como la que usamos para definir el vector covariante es un tensor de rango 0: no cambia al cambiar de sistemas de coordenadas.

Como ya dijimos, en estas notas se definieron (de manera vaga) estos tensores como una *coleccion de componentes que transformas de cierrta manera*. Cuando vean la definición de un libro de geometría diferencial entenderán porque esta definición preliminar es insatisfactoria. Deberian sentirse insatisfecho por definir algo por *como transforma*. De hecho, no hemos dado ninguna definición. La actitud mas honesta consiste en considerar que hay una definción general de tensor y que de esta definición se desprende que hay ciertos numeros asociados (sus componentes) que cambian en la forma [**?**] ante cambios generales de coordenadas.

Observación: las propias coordenadas de un punto (las x^μ) no son las componentes de un vector, ni covariante ni contravariante. Al cambiar de sistema, las x^μ pasan a ser las y^μ por definición. Y no es cierto que $y^\mu = H^\mu{}_\nu x^\nu$. Esto solo podria ocurrir si las funciones que dan la transformación fueran lineales. Este será el caso en la sección II.

1.3 Tensores invariantes: aquellos cuyas componentes no cambian

Existen tensores cuya componentes son idénticas en todos los sistemas de coordenadas o en al menos en algunos sistemas relacionados por ciertas transformaciones. Puede parecer una contradición esto, porque de la definicón anterior parecería que las componentes de un tensor de rango no nulo *deben cambiar*.

Sin embargo, ocurre que hay casos en que no cambian. Tal es el caso de un objeto que surge de realizar esta operación tan tonta como esta: tome la derivada parcial de la coordenada x^μ respecto a la x^ν y coloque en forma matricial todos esos resultados. Tendremos en cada sistema de coordenadas una matriz con 1's en la diagonal y 0 fuera. Podrían estos numeros pensarse como las componentes de un tensor? Si. Es un ejercicio muy simple e instructivo verificar que en efecto esos 1's y 0's pueden verse como componentes de un tensor δ de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cuyas componentes δ^μ_ν son 1 si $\mu = \nu$ y 0 de lo contrario. Esta es la delta de Kroencker pero ahora vista como un tensor.

No hay contradicción entre el hecho de que sus componentes son las mismas en todos sistema y el hecho de que transforman como las de un tensor. En efecto, puede verse que si se aplica la ley de transformación correspondiente a Eq [**?**], usando su hipotetico caracter de tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, las componentes en el nuevo sistema resultan idénticas a las del anterior:

$$\delta'^{\mu}_{\ldots\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \delta^\sigma_\rho = \delta^\mu_\nu \tag{7}$$

En la primera igualdad, hemos puesto un tilde pensando que en general esperamos encontrar otra colección de numeros en el nuevo sistema. Sin embargo, la segunda igualdad expresa la igualdad: hemos vuelto

a obtener la delta de Kronecker como resultado de la regla de la cadena. Veremos en seccion II un caso similar de un tensor (el tensor métrico) cuyas componentes no cambia ante un grupo de transformaciones especiales.

1.4 Contracción de indices

Además de el producto tenosorial, que incrementa el rango de los tensores involucrados, existe otra operación entre tensores que se denomina *contracción*. El caso elemental de contracción es entre un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y uno de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$s \equiv \sum_{\mu=1}^{D} V^{\mu} W_{\mu} \tag{8}$$

Hemos restituido la sumatoria provisoriamente solo para enfatizar que la contracción implica una suma. Es trivial verificar que s es un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, que no es otra cosa que un escalar. De esta manera, hemos hallado un invariante a partir de dos vectores.

Ejemplo: si contraemos los tensores basicos de tipo 1, de componentes $\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}$, el escalar obtenido es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$

, que no es ningún objeto sorprendente por su invariancia. Es de hecho $\frac{d\phi}{d\tau}$, es decir, la derivada de un escalar (ϕ) a lo largo de la curva, o sea, la derivada de un invariante ante parametro que es un invariante.

En general, la constracción entre dos tensores se hace realizando primero el producto tensorial y luego apareando indices superiores (contravariantes) con inferiores (covariantes) sumandolos. Por cada apareo, se reduce en 1 el rango tanto covariante como contravariante del tensor. Asi las cantidades

$$\sum_{\mu=1}^{D} W^{\mu\rho} V_{\mu\sigma} \tag{9}$$

son las componentes de un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cuyos indices son aquí ρ y σ (los indices libres, es decir, los no sumados)

2 II. Tensores ante transformaciones lineales que preservan una forma cuadratica

En la formulación original de Einstein de la relatividad especial, el acento estuvo en encontrar como deben relacionarse las mediciones temporales y espaciales en sistemas inerciales a fin de que estos describan las leyes del campo electromagnetico y la dinamica de una partícula cargada de manera identica. En particular, observadores de distintos sistemas inerciales deberían coincidir en que las ondas electromagneticas se mueven a la misma velocidad. Einstein deriva esas trasnformaciones, concidentes con las obtenidas por Lorentz. Estas transformaciones pronto fueron vistas por Hermann Minkowski como aquellas que dejan

una forma cuadratica invariante. Aunque no es estrictamente necesario referirnos a una estructura métrica para formular las ecuaciones relativistas, el uso de la métrica Minkowskiana es sin duda muy útil (aunque a Einstein le pareció en un principio superfluea la reformulación de Minkowski). El uso de estructuras metricas para expresar grupos de simetria de un conjunto de leyes no es privativo de la fisica relativista. Muchos grupos de simetría (de la fśica Newtoniana) pueden pensarse como transformaciones que dejan invariante alguna estructura métrica. Esto justifica lo que sigue.

2.1 Metricas en R^D

.

Independientemente de lo visto en la sección anterior, podriamos empezar de cero considerando en R^D una forma cuadratica dada por una matriz simétrica e invertible $\mathbf{g}$, siendo las X^μ las coordenadas naturales de R^D y proponermos el problema de hallar ante que cambios de coordenadas la siguiente expresión

$$(\mathbf{X})^T \mathbf{g}\, \mathbf{X} = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$$

queda invariante.

Para ser más concreto aún, condideremos el caso $D = 2$ con g la matriz identidad. En ese caso el problema es el de hallar los cambios de coordenadas de X^1, X^2 a otro dado por Y^1, Y^2 tales que

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 = (Y^1)^2 + (Y^2)^2$$

. Es decir, queremos ver ante que cambios de coordenadas la suma de cuadrados de las coordenadas resulta dar el mismo número.

Por supuesto, sabemos cual es la respuesta: en este caso particular, estos cambios de coordenadas estan dados por transformaciones lineales $\mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{X}$, con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -\varepsilon sen(\theta) & \varepsilon cos(\theta) \end{pmatrix}$$

($\varepsilon = \pm 1$)

Ese conjunto de matrices Λ forma un grupo que se llama el *grupo ortogonal* de R^2 y se denota como $O(2)$.

Las matrices Λ serian diferentes si cambiamos la forma cuadratica. Por ejemplo, si usamos $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matriz Λ deberia ser de la forma

$$\Lambda = \pm \begin{pmatrix} cosh(\theta) & senh(\theta) \\ \varepsilon senh(\theta) & \varepsilon senh(\theta) \end{pmatrix}$$

. Este grupo corresponde al de los conocidos boost en una dirección espacial (siendo la coordenada temporal la numero 1 y la espacial la 2), combinados con una reflexion en torno a los ejes de signo $+$ en frente de la matriz; no es relevante esta cuestión ahora). Este grupo se denota como $O(1,1)$, indicando que la forma cuadriatica diagonal tiene un 1 y un -1 en sus entradas.

En general, la forma de Λ quedara determinada por la elección de g a partir de la siguiente consideración: queremos hallar trasnformaciones $\mathbf{X} \to \mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{X}$ tales que valga:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{g} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \mathbf{g} \mathbf{Y} \tag{10}$$

para todo $\mathbf{X}$. Se puede ver facilmente que esto implica:

$$\boxed{\Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}} \tag{11}$$

Los ejemplos mas relevantes en física son $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ en $D = 3$ y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ en $D = 3+1$, siendo η la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

El grupo de transformaciones que preservan la forma cuadratica es el de $O(3)$ y $O(1,3)$ respectivamente. El primero, el grupo de rotaciones y reflexiones. El segundo, es el grupo de Lorentz [1].

2.2 La forma cuadratica como métrica que define distancias y normas

Teniendo a disposición la forma cuadratica no degenerada g, podemos introducir una noción de distancia o seudodistancia entre dos puntos, asignando un número al par, que será el mismo para todos los sistemas de coordenadas relacionados por las matrices Λ correspondientes. Si X_A^μ y X_B^μ son las coordenadas de dos puntos A y B, podemos tomar la diferencia $(X_{AB})^\mu \equiv (X_B)^\mu - (X_A)^\mu$ y calcular:

$$g_{\mu\nu}(X_{AB})^\mu (X_{AB})^\nu$$

Esto da un número que es cero cuando los puntos coinciden pero que no es necesariamente positivo, dado que g no es una matriz necesariamente definida positiva. Por eso el adjetivo *seudo*. En el caso de la métrica de Minkowski, hay pares de puntos tales que su pseudo distancia es cero y otros para los cuales es incluso negativo. Pero lo importante es que este número es el mismo en todos los sistemas de coordenadas relacionadas por Λ.

Una forma alternativa de pensar a esta (seudo)distancia es como (seudo)norma del vector de componentes $(X_{AB})^\mu$. Más aun, podemos considerar dos pares de puntos X_A, X_B y X_B, X_C y asignar un producto escalar entre las D-uplas que se obtienen haciendo la diferencia entre ambos pares, lo cual nos lleva a pensar que la forma cuadratica define un producto escalar $< .,. >$ definido por:

$$\boxed{< X_{AB}, X_{CD} > \equiv g_{\mu\nu}(X_{AB})^\mu (X_{CD})^\nu} \tag{12}$$

Sea cual fuere la relevancia de definir esto, lo cierto es que este número es un invariante para todos aquellos sistemas relacionados por Λ.

Un paso adicional es extender esa definición a lo que llamariamos puntos "infinitesimalmente proximos". Mas precisamente, tomemos una curva cualquiera parametrizada por τ y consideremos la D-upla de los $\frac{X^\mu}{d\tau}$. Note que por ser las Λ transformaciones lineales, este objeto transformara igual que las X^μ. Por tanto, podemos tomarle aplicarle a este la norma definida antes:

$$< \frac{dX}{d\tau}, \frac{dX}{d\tau} > = g_{\mu\nu} \frac{dX\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} \tag{13}$$

la cual será invariante ante transformaciones dadas por Λ.

[1] que contienen subgrupos conectados continuamente con la identidad, que son los verdaderos grupos de simetría esperados. No entraremos en esta cuestión en estas notas

Note que a diferencia del caso general de la sección 1, en este caso especial *las propias X son componentes de un tensor de rango 1*, dado que estas transforman como las $\frac{dX}{d\tau}$. Esto se debe al caracter lineal de las Λ. Ante cambios generales de coordenadas, las X^μ no son componentes de un vector (a pesar que podemos llamarle vector en el sentido de elemento de un espacio vectorial).

2.3 La metrica como tensor de rango 2 ante transformaciones dadas por Λ

Note que hasta el momento los coeficientes $g_{\mu\nu}$ son meramente los elementos de una matriz cuadrada (simetrica e invertible); no hemos dicho que sean componentes de ningún tensor de rango dos. Son de hecho numeros que son los mismos en todo sistema de coordenadas relacionado por las Λ y se usan para definir el producto escalar. Sin embargo, el hecho de ser numeros que valen lo mismo en cada sistema no excluye que puedan ser las componentes de un tensor: podría tratarse de un *tensor invariante* como lo es la delta de Kroenecker vista en la primera parte.

Para ello debemos adaptar las reglas de transformación de tensores ante cambios generales de coordenadas al caso en que estos cambios esten restringidos a los especiales dados por Λ. De hecho, no hay mucho que hacer: basta repetir la definción de eq (6 entendiendo que ahora Λ no es cualquier matriz jacobiana sino aquella especial dada por 11.

En efecto, podemos ver de hecho que las componentes de la matriz g forman un tensor covariante de rango 2 con esta definición restringida. Para ello debemos comprobar que con nuestra definición de $g_{\mu\nu}$ como numeritos fijos en los sistemas especiales, vale la ley de transformación:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu g_{\rho\sigma} \tag{14}$$

La primera igualdad expresa el hecho de que en los sistemas relacionados por Λ no hay diferencia en las componentes de g. La segunda igualdad es la que debemos verificar si es cierto que g transforma como un tensor. Esta igualdad puede verificarse fácilmente reescribiendola en forma matricial, constatando que no es otra cosa que la de eq (11). Seria instructivo comprobar explicitamente esto en el caso 2 dimensional para la metrica de Minkowski.

De esta forma, podemos invertir el rzaonamiento y *deducir* la invariancia del producto escalar entre dos vectores V y W del hecho de que g es un tensor (al menos antes estos cambios especiales): $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$ es la contraccion entre un tensor covariante de rango 2 y dos vectores contravariantes, contracción que no deja ningun indice libre. Este debería ser un escalar.

2.4 La metrica como tensor de rango 2 ante transformaciones generales de coordenadas

Si bien en esta sección II nos hemos restringido a un conjunto particular de sistemas de coordenadas, podriamos plantearnos la pregunta de como escribir la norma de un vector $\frac{dX}{d\tau}$ utilizando un sistema de coordenadas de otras x^μ relacionadas con las X^μ mediante un cambio general de coordenadas, no necesariamente el dado por las Λ (no siquiera lineal). Si llamamos H^μ_ν a los coeficientes de la matriz Jacobiana de coeficientes: $\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}$, vemos que:

$$g_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau} = g_{\mu\nu}H^\mu_\rho H^\nu_\sigma \frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \tag{15}$$

Para esta igualdad hemos utilizado simplemente la regla de la cadena. Observemos que si quisieramos usar una matriz en el sistema de las x^μ, que juegue el rol de metrica (es decir, de forma tal que la norma del vector $\frac{dx^\sigma}{d\tau}$ de lo mismo que en el sistema de las X) deberiamos utilizar la matriz g' de coeficientes $g'_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} H^\mu_\rho H^\nu_\sigma$. Dado que la matriz H ahora no es de las del grupo de las Λ, no podemos decir que esta g' sea la misma matriz que g. No lo será de hecho, si H no coincide con alguna Λ.

Pero lo que si podemos afirmar es que las componentes de g' se relacionan con de g por la regla general de eq [**?**]. Mirando cuidadosamente vemos que efectivamente g transformó como un tensor de rango 2.

Desde este punto de vista, podemos reconsiderar las transformaciones Λ como un subconjunto de las transformaciones generales de coordenadas que tienen la peculiaridad de dejar invariante a las componentes de la métrica. Son por eso denominadas *isometrías*

Recapitulando:

Las transformaciones Λ pueden pensarse como aquellas que dejan una expresion cuadratica de las X invariantes, o como un subconjunto de las trasnformaciones de coordenadas que dejan a la metrica (como tensor de rango 2) invariante.

2.5 Subiendo y bajando indice con la métrica

En general, se puede ver que si se tiene un tensor covariante de rango 2 $W_{\mu\nu}$, tal que la matriz correspondiente es invertible, entonces la matriz inversa tendra coeficientes que formarán un tensor contravariante de rango 2. Esto es algo que no es muy dificil de verificar. Pero aceptemoslo como hecho. A las componentes de tal tensor deberiamos denotarla como $W^{-1\mu\nu}$, dado que son los coeficientes de la matriz inversa a la W. Sin embargo, se opta por denotarla simplemente por $W^{\mu\nu}$ sin lugar a confusión.

Es por eso que en el caso de la métrica tenemos no solo un tensor covariante de rango 2, de componentes $g_{\mu\nu}$, sino también otro de componentes $g^{\mu\nu}$ que nos viene de regalo. Las componentes del segundo son las de la matriz inversa a la g de partida :

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{16}$$

Note que la igualdad es correcta incluso asignando a la ubicación de los indices su significado tensorial de covariante y contravariante: como vimos antes en seccion I, la delta de Kroenecker es un tensor mixto de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ahora bien: en el caso particular en que estamos en aquellos sistemas de coordenadas en los que g es diagonal, con 1 y -1 en su diagonal, las componentes $g^{\mu\nu}$ y las $g_{\mu\nu}$ son identicas!. Eso ocurre para la metrica de Minkowski y la Euclidea. Por eso, puede parecer irrelevante usar $\eta_{\mu\nu}$ o $\eta^{\mu\nu}$.

El hecho es que la métrica permite asignar a un vector de tipo contravariante uno covariante y viceversa. La métrica establece una dualidad. Por ejemplo, dado el vector de componentes V^μ, podemos definir otro de componentes W_μ a traves de:

$$W_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \tag{17}$$

Por las reglas de transformación de tensores y sus contracciones, vemos que W_μ son las componentes de un vector covariante. Dado que estas están en correspondencia biunivoca con las V^μ no se utiliza una nueva letra sino que definimos $V_\mu =\equiv g_{\mu\nu} V^\nu$.

Por ejemplo, consideremos la metrica de Minkowski en $1+1$. Dado el cuadrivector de componenes X^0, X^1 (de ahora en mas asignaremos el 0 a la coordenada temporal), tenemos:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \eta_{0\mu}X^\mu = \eta_{00}X^0 + \eta_{01}X^1 = X^0 \\
X_1 &= \eta_{1\mu}X^\mu = \eta_{10}X^0 + \eta_{11}.X^1 = -X^1
\end{aligned}
$$

De modo que la 2-upla de componentes $(X_0, X_1) = (X^0, -X^1)$ transformará diferente al cambiar de sistema de coordenadas. En vez de utilzar Λ deberá utilizarse $(\Lambda^{-1})^T$. Rara vez tendrá interés hacer la transformación de las X_μ. Lo relevante aquí es observar que por ser componentes de un vector covariante, la siguiente expresión será un invariante:

$$X_\mu V^\mu = X_0 V^0 + X_1 V^1 \tag{18}$$

Pero ese invariante no es nada nuevo. Es solo el viejo invariante $X^0V^0 - X^1V^1$ escrito de otra forma.

Note que para la metrica de Minkowski *bajar un indice implica meter un signo menos por cada indice espacial que se baja*, de modo que solo hay un signo de diferencia cuando hay un numero impar de indices espaciales. Asi, por ejemplo, si se tiene un tensor de componentes $W^{\mu\nu}$ el tensor con indices bajos correspondiente sera definido por:

$$W_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}W^{\nu\sigma} \tag{19}$$

En este caso tenemos una doble sumatoria en el miembro derecho. Pero dado qeu η es diagonal y solo tiene 1 y -1 en su diagonal, el cambio al bajar indices se reduce a una tontería:

$$W_{00} = W^{00} \quad W_{11} = W^{11} \quad W_{12} = -W^{12} \quad W_{21} = -W^{21}$$

Note que en el caso W_{11} no hubo cambio de signo por estar presente el factor $\eta_{11}\eta_{11}$

Observación: *las componentes de este tensor W con indice abajo no son ls de la matriz inversa a la de los W con indice arriba. Eso solo aplica a la metrica usada para subir y bajar indices!*

Naturalemente también se puede subir indices, usando la metrica inversa (cuyas componentes son las mismas que las η). De esa forma:

$$X^\mu = \eta^{\mu\rho}X_\rho$$

. Note que al bajar y subir se vuelve al tensor original.

2.6 Derivando tensores

Para el caso particular en que nos restringimos a transformaciones de coordenadas lineales, la derivada nos permite construir nuevos tensores. Para ello, debemos comenzar con un *campotensorial*, es decir, una función que a cada punto de R^D le asigna un tensor. De lo contrario, que vamos a derivar?

Por ejemplo si las $V^\mu(X)$ son las componentes de un vector contravariante, entonces:

$$W^\mu_\nu \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial X^\mu} \tag{20}$$

son las componentes de un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para demostrar esto, basta ver como cambia V ante transformaciones dadas por Λ y usar que estas Λ son constantes y por tanto indiferentes a la derivada.

Notación:

$$\boxed{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X^\mu}}$$

Note que la notación ∂_μ (indice μ abajo) es coherente con que el operador $\frac{\partial}{\partial X^\mu}$ le agrega a V un caracter covariante adicional, en el indice μ[2]

Note que en el caso general (transformaciones no lineales), la derivada no sirve para construir tensores de rango superior, salvo en el caso trivial de un escalar (tensor de rango cero). En ese último caso, las $\partial_\mu \phi$ resultan ser las componentes de un vector covariante.

De estas consideraciones se deduce que, por ejemplo, $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ es un operador diferencial escalar, es decir, uno que no le cambia el caracter tensorial al objeto al que se aplica (si es que este era un tensor). Esto se puede verificar muy facilmente: $\partial_\mu\partial_\nu$ incrementa el caracter covariante en dos indices. Pero estos dos nuevos indices son contraidos con los de la metríca.

Por ultimo, una mera cuestión de notación: $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. Este operador diferencial, en el caso Minkowskiano, es similar al anterior, difiriendo en un signo (cuando el indice sea espacial). Otra relación ociosa seria esta: $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial X_\mu}$. Es decir, este gancho con indice arriba *no es la derivada ordinaria sino la derivada respecto a las coordenadas duales*.

2.7 Porque nunca escuchamos hablar de vectores covariantes y contravariantes antes de ver relatividad especial

La respuesta esta en que si nos restringimos a cambios de coordenadas que preservan la metrica Euclidea ($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$), entonces las Λ satisfacen: $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$. Esto ocurre cuando comparamos cantidades en sistemas relacionados por rotaciones espaciales en R^3[3]. La distinción entre vectores covariantes y contravariantes (ante rotaciones) desaparece, dado que la matriz Jacobiana es igual a su inversa transpuesta. Relacionado con esto, subir y bajar indices con la matriz diagonal no va a cambiar nada. No habra signos menos en ningun lado. Por eso hicimos bien en tratar al gradiente como un vector del mismo tipo que el vector tangente.

[2]Mas alla de esto, esa notación debería usarse siempre por ser no tener nada excesivo: cuando se deriva es irrelevante como se llama la variable: lo que importa es que lugar ocupa entre las varias varibles

[3]No debe pensarse que el paso de la fisica Newtoniana a la relativista consiste en cambiar una metrica cuadridimensional euclidea a la minkowskiana. De hecho, no hemos visto en la fisica Newtonian una noción de vector cuadridimensional