Estructura de la materia 4

Primer cuatrimestre 2019

Práctica 6: Formulación Lagrangiana de modelos relativistas

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es clave para la construcción de las *teorías cuanticas de campos* (QFT). Los campos que aparecen aquí *no deben interpretarse como funciones de onda*; las ecuaciones relativistas derivadas de estos Lagrangianos son ecuaciones de una teoría clásica sirve de semilla para llegar a la versión cuántica por medio de un proceso de cuantización. Del lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrás que se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante transformaciones de Poincare, los términos tipicos del Lagrangiano del modelos estandard presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). En la versión cuantica, la energía y momento de los campos esta discretizada en terminos de cuantos de energía-momemento, que obedecen las reglas de dispersión de particulas relativistas. Si bién el estudio del proceso de cuantización va más alla del alcance de este curso, se comenzará en esta guía a dibujar *diagramas de Feynman* correspondientes a los términos de interacción, los cuales son representaciones graficas de contribuciones a la amplitud de Scattering, de un gran valor heuristico.

1. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

   (a) Halle las simetrías del problema, diga que grupo forman. Halle las corrientes de Noether correspondientes a las simetrías internas.

   (b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de ϕ. Muestre que es equivalente (y mas simple) hallar las ecuaciones de movimiento utilizando las variables ϕ y ϕ^*.

   (c) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

   (d) Calcule la carga conservada asociada a la invariancia respecto a traslaciones temporales y verifique que es definida positiva.

   (e) Considere ahora el Lagrangiano:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi,$$

   para un campo ϕ *real*. Repita el analisis anterior de los primeros tres items. Note el factor $\frac{1}{2}$ global diferencia. (Si bién es irrelevante para las ecuaciones de movimiento, se introduce para que el momento canonico conjugado sea $\partial_t \phi$, Será discutido en clase este punto).

2. Considere el Lagrangiano:

$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu i \partial_\mu \psi - m \bar{\psi}\psi$$

.

(a) Halle las ecuaciones de movimiento, variando respecto a $\bar{\psi}$

(b) Compare con la que obtiene variando respecto a ψ.

(c) Halle las simetrías de este lagrangiano y obtenga la corriente de Noether asociada a las simetrfías internas.

3. Considere los siguientes Lagrangianos que describen a dos espinores de Dirac ψ_1 y ψ_2 y un campo escalar real ϕ masivo interactuantes:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\
&\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_2 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\
&\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_1 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_2
\end{aligned}
$$

(a) Halle todas las simetrías de ambos lagrangianos indicando claramente cuantos párametros independientes tiene en cada caso.

(b) Halle las corrientes de Noether conservadas asociadas a las simetrías internas encontradas, describiendo que ley de conservación espera a nivel cuantico.

(c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los términos de interacción, indicando con 1 y 2 a los fermiones y con una linea punteada al campo escalar .

(d) A partir de estos, dibuje los diagramas que contribuyen a los procesos
i)$1+\bar{2} \to \bar{1}+2$
ii) $1+\bar{2} \to 1+\bar{2}$
iii) $1+1 \to 2+2$
al orden más bajo en g para cada Lagrangiano. En base a las leyes de conservación del punto b), diga que procesos no son posibles.

4.  Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\phi^*\phi - M\varphi\varphi^* - V(\varphi,\phi)$$

donde $V(\varphi,\phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.

(a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.

(b) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$?

5. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_3)\psi_3(x)$$

   (a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este lagrangiano?

   (b) Y si fuesen las tres masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3$), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso?

6. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado al lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

   siendo D_μ la denominada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

   (a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción.

   (b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.

   (c) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para este modelo