Estructura de la materia 4

Primer cuatrimestre 2019

Práctica 7B: Teorías de Gauge (caso no-abeliano)

Q: Is it true what M.E. Mayer said in 1977: A reading of the Yang-Mills paper shows that the geometric meaning of the gauge potentials must have been clear to the authors since they use the gauge invariant derivative and the curvature for the connection ... Yang: Totally false. What Mills and I were doing in 1954 was generalizing Maxwells theory. We knew of no geometrical meaning of Maxwells theory and were not looking in this direction. Connection is a geometrical concept which I only learned around 1970. Q: An interesting question is whether you understood in 1954 the tremendous importance of your original paper ... Yang: No. In 1950 we felt our work was elegant. I realized its importance in the 1960s and its great importance to physics in the 1970s. Its relation to deep mathematics became clear to me only after 1974. Q: Is it important for a physicist to learn a lot of mathematics? Yang: No, if a physicist learns too much of mathematics, he or she is likely to be seduced by the value judgment of mathematics, and may loose his or her physical intuition. I have likened the relation between physics and mathematics to a pair of leaves. They share a small common part at the base, but mostly they are separate.

de una entrevista a Chen Nin Yang.

1. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathscr{L}_G = \left(\partial_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi\right) - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

donde Φ es un doblete $\begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$ de campos escalares complejos [1] . Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones de $U(2)$:

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{-i(\beta \mathbf{1} + \alpha^a \cdot \frac{\sigma_a}{2})} \Phi(x)$$

donde β y los α^a ($a = 1,2,3$) son 4 constantes arbitrarias (reales). $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $2x2$.

   (a) A fin de asegurarse de que entiende que significa esta transformación, halle explicitamente como transforman los ϕ_A y ϕ_B en el doblete en los casos en que la única constante no nula es a) β b) α^3 c) α^2.

   (b) Considere ahora que quiere *gaugear*[2] el subgrupo $SU(2)$ que se obtiene fijando $\beta = 0$ (por qué esto corresponde a $SU(2)$? Ver último ejercicio para ver qué pasaría si queremos gaugear el $U(1)$ que dejamos de lado), es decir, que quiere obtener un lagrangiano nuevo, acoplando Φ a nuevos campos tales que el nuevo lagrangiano sea invariante ante $SU(2)$ pero con los α_a

[1] no hay modificación substancial si se usa un Lagrangiano para un doblete de espinores

[2] Verbo de dudosa aceptación en la RAE que denota el acto de transformar un lagrangiano invariante ante transformaciones determinado por ciertos parametros constantes en otro en que esas constantes pasan a ser funciones arbitrarias del espacio-tiempo

ahora funciones del espacio-tiempo. Para ello, la receta estandar comienza con sustituir ∂_μ en el término cinético del lagrangiano por $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA^a_\mu T_a$ ($T_a \equiv \frac{\sigma_a}{2}$). Halle como deben transformar los A^a_μ para que D_μ como operardor transforme como $D_\mu \rightarrow \Omega(x) D_\mu \Omega^{-1}(x)$ siendo $\Omega(x) \equiv e^{-i\alpha^a(x)\cdot\frac{\sigma_a}{2}}$

(c) A fin de construir el término cinético (que regalo dara términos de interacción) para los A^a_μ (campos de gauge), muestre que el conmutador $G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)$ es una combinación de los generadores del álgebra ($G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T_a$) y que $G_{\mu\nu}$ transforma como $G_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-1}(x) G_{\mu\nu} \Omega(x)$.

(d) Muestre que el término cinetico $-\frac{1}{2} tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ es invariante de gauge y es igual a $-\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a$ (aqui la posición distinta de los indices a en $G_{\mu\nu}$ no implica ningún cambio de signo).

El Lagrangiano completo, invariante de gauge, es entonces:

$$L = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} Tr G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

Esencialemente, esta fue la forma en que C.N. Yang y R. Mills hallaron un lagrangiano invariante ante una simetría $SU(2)$ denominada *isotopic invariance*. Ver *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, C. N. Yang and R. L. Mills Phys. Rev. 96, 191 (1954)

2. Para bajar más a tierra el caso anterior:

   (a) Halle explicitamente el acoplamiento de los campos ϕ_A y ϕ_B con los tres campos de gauge. Como se modifican estos acoplamientos si se hubiese comenzado con un doblete de campos de Dirac?

   (b) Halle explicitamente la expresión de $G^a_{\mu\nu}$ y compare con el $F_{\mu\nu}$ de Maxwell.

   (c) Verifique que los términos cuadraticos en el érmino cinético para el campo de gauge son los de Maxwell para cada A^a_μ (con su normalización estandar.

   (d) Halle explicitamente los términos cubico y cuarticos de interacción entre los propios campos de gauge, motrando que que vienen pesados con g y g^2 respectivamente.

   (e) Dibuje los diagramas de Feynman para *todos* los términos de interacción (son muchos; ya lo sabemos. Pero hacerlo una vez ayudara a captar la complejidad de este modelo), mostrando la diferencia entre el caso que se trata de dobletes de campos escalares y de Dirac.

3. La transformación de gauge de los campos de gauge A^a_μ difiere de la del campo de Maxwell, tal como se vio en uno de los items del ejercicio anterior. Halle la transformación de cada A^a_μ a primer orden en los parametros α^a.

4. Considere ahora un caso mas general, en que los campos escalares o de Dirac del ejercicio 1 se hallan en la representación fundamental de un grupo $U(n)$. Considere el problema de gaugear el subgrupo $SU(N)$ dado por ciertos generadores T_a, elegidos estos de tal forma que $Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$. Reproduzca la receta del ejercicio 1 en este caso, siendo explicito en cuantos campos de gauge hay (en términos de N y que dimensión tienen las matrices T). Halle la expresión explicita de los $G^a_{\mu\nu}$ dejandolo expresado en t'erminos de los campos y las constantes de estructura f^a_{bc} y dibuje esquematicamente los tipos vertices de interacción.

5. En el caso en que el grupo de gauge es $SU(2)$, las expresiones anteriores pueden reescribirse en términos de componentes de un vector tridimensional. Organizando los tres campos de gauge, que llamaremos W_μ^a,en un vector $\vec{W}_\mu \equiv (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ muestre que

   (a) Cada componente de $G_{\mu\nu}$ puede leerse de las componentes del vector:

   $$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$$

   (puede que halla un signo incorrecto en el segundo término)

   (b) A primer orden en los parametros α^a de la transformación de gauge (organizadas ahora en un vector $\vec{\alpha}$), el campo $\vec{W}$ transforma como:

   $$\vec{W}_\mu' = \vec{W}_\mu + factor \quad g\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu + factor \quad \partial_\mu \vec{\alpha} \tag{1}$$

   Verifique que esta transformación coincide con la hallada en un ejercicio anterior.

   (c) Usando la forma de la transformación de $G_{\mu\nu}$, verifique que $\vec{G}_{\mu\nu}$ transforma como lo hace un vector ante una rotación. (ayuda: necesitara usar una forma inteligente de ver cuando da $e^{i\alpha^a\sigma_a}\sigma_b e^{-i\alpha^a\sigma_a}$, recordando que esta implementa una rotación en las matrices de Pauli)

   (d) El término $-\frac{1}{2}\, TrG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ se puede reescribir como $-\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}.\vec{G}^{\mu\nu}$.

   La útilidad de esta reformulación esta en que se pone, en este ejemplo particular, la invariancia del término cinético del campo de gaugeen términos de la invariancia mas familiar ante rotaciones de un producto escalar.

6. **Qué pasó con el $U(1)$?** En los casos anteriores hemos dejado un $U(1)$ de lado por conveniencia. La razón está en que $U(N)$ se puede pensar como $U(1) \times SU(N)$ de tal forma que los generadores del álgebra de este $U(1)$ conmuten con los de $SU(N)$ [3]

   (a) Verifique este es el caso del subgrupo del ejercicio 1 que se obtiene fijandon los $\alpha^a = 0$.

   (b) Muestre que si propone ahora gaugear el grupo completo, proponiendo $D_\mu = \partial_\mu + g'B_\mu \mathbf{1} + gA_\mu^a T_a$, la invariancia de gauge implica una transformación en la que el campo B_μ *no se mezcla* con los A_μ^a y que la transformación de B_μ es la usual del campo de Maxwell.

   Por la razón anterior , el término cinético puede construirse como una suma del término de Maxwell para B_μ y el de Yang-Mills generico para los A_μ^a. Este será el caso del sector electrodébil del modelos estandard. No lo hemos hecho desde el principio para no enredar la explicación. En general, al gaugear un grupo que se descompone en producto directo de otros, basta aplicar la receta original para cada subgrupo por separado y luego sumar las contribuciones de cada término cinético.

7. **Ejercicio clarificador de potenciales confusiones**: Al acoplar campos de Dirac o escalares a campos de gauge, el número de estos campos no tiene porque coincidir con la dimensión de la *representación fundamental*(que es la de dimensión mas baja) del grupo. El ejemplo anterior podria dar a pensar esto, dado que teniamos un doblete de campos escalares y la dimensión de la representación fundamental de $SU(2)$ es 2. A fin de subsanar este posible mal entendido:

[3] En realidad la relación entre $U(N)$ y $U(1) \times SU(N)$ no es tan obvia como puede parecer a primera vista. No vamos a detenernos en esta cuestión técnica.

(a) Considere un triplete de campos escalares reales y escriba el término cinetico que tenga invariancia ante $SU(2)$.

(b) Sustituya la derivada ordinaria por la covariante adecuada. Vea que la cantidad de campos de gauge sigue siendo tres pero que deben modificarse los generadores al escribir la derivada covariante.