ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2019

NOTACIÓN RELATIVISTA Y TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Sobre los indices: Indices griegos (μ, ρ , σ) corren de 0 a 3, siendo 0 el indice que indica la coordenada temporal.

De modo que las X^μ describen al tiempo y a las coordenadas temporales.

Transformaciones de Lorentz Una transformación de Lorentz se define como una transformación lineal $X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$ (Λ una matriz cuyo indice de fila es el indice superior y cuyo indice de columna es el inferior) tal que :

$$X'^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu} = X^\mu X^\nu \eta_{\mu\nu}, \text{ con } \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, en la notación habitual t, x, y, z, las transformaciones de Lorentz son aquellas que dejan invariantes la forma cuadratica $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.

Las condiciones que debe cumplir la matriz Λ se deducen trivialmente y pueden formularse de dos maneras alternativas:

$$\begin{aligned} \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu &= \eta_{\mu\nu} \\ \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta \Leftrightarrow \Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta \ \ (\textit{Forma Matricial}) \end{aligned} \tag{1}$$

Observación: de la última expresión se ve claramente la diferencia entre una transformación de Lorentz y una rotación: una matriz de rotación satisface que la inversa es igual a su transpuesta.

Ejemplos de transformaciones de Lorentz

Un ejemplo es lo que se conoce como *boost*, que corresponde al cambio a un sistema de coordenadas asociado a un cuerpo que se mueve en movimiento rectilineo uniforme con una velocidad dada. Si, por ejemplo, el boost es en la dirección x, Λ sera de l forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

siendo β un parametro de modulo menor a 1 y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (Puede verse que el sistema inercial correspondiente se mueve con velocidad $-\beta$).

Otro ejemplo es cualquier transformación que no toque a la coordenada temporal pero deje invariante la forma $x^2 + y^2 + z^2$. Estan son esencialmente las rotaciones, ademas de la inversión espacial.

Vectores contravariantes y formación de invariantes

En forma muy pedestre se puede decir que cualquier colección de 4 cantidades V^μ que ante una transformación de Lorentz transforme como las X^μ se considera un cuadrivector contravariante:

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \tag{3}$$

Una forma simple de construir una expresión *invariante* ante transformaciones de Lorentz es mediante una combinación bilineal:

$$V^{\mu}W^{\nu}\eta_{\mu\nu}$$

, la cual puede escribirse como

$$V^0W^0 - \vec{V}.\vec{W}$$

. Es trivial ver que esta expresión es invariante observando la condición (1).

Vectores covariantes La matriz η (que puede pensarse definiendo una estructura metrica, denominada *metrica de Minkoswki*) permite construir a partir de un vector contravariante otro que se denomina covariante, cuyas componentes se denotan con un indide bajo:

$$V_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu}V^{\nu} \tag{4}$$

La colección de los V_{μ} es similar a la de los V^{μ} pero difiere en el signo de las componentes espaciales. Asi, escribiendo V^{μ} como una 4-upla $(V^0, \vec{V}$, la 4-upla con indices bajos es $V^0, -\vec{V}$.

La ley de transformación de los vectores covariantes se deduce de la de los contravariantes. No vale la pena escribir una expresón para la matriz de cambio de base (que solo difiere de la Λ original en un signo en aquellas componentes con un solo indice temporal). Lo importante es que usando la definición de vector covariante, el invariante

$$V^{\mu}W^{\nu}\eta_{\mu\nu}$$

puede reescribirse como:

$$V^{\mu}W^{\nu}\eta_{\mu\nu} = V^{\mu}W_{\mu} = V_{\nu}W^{\nu} \tag{5}$$

Note que en cualquiera de las dos ultimas expresiones ya no hay signos menos explicitos en la suma. Es decir: $V_{\nu}W^{\nu} = V_0W^0 + V_1W^1 + V_2W^2 + V_3W^3$

En particular, el invariante cuadratico formado con un solo vector de componentes V^{μ}, se escribe como V^2 y se puede escribir como $V^{\mu}V_{\mu}$. Tal es el caso de p^2 para el cuadrimomento de una partícula.

Observación: V^2 no es necesariamente positivo y no debe confundirse con la norma de el vector tridimensional $\vec{V}$ formado por sus tres componentes espaciales. Para referirnos a esto último escribirmos $\mid \vec{V} \mid^2$. De modo que:

$$V^2 = (V^0)^2 - \mid \vec{V} \mid^2$$

Lista de grupos de simetria relevantes

Es facil hacerse una ensalada en la cabeza con tanto grupo y transformaciones: Poincare, Lorentz, Rotaciones, boost, Galileo.

Lorentz: grupo de transformaciones lineales (y homogeneas) que dejan invariante la forma cuadratica Minkowskiana. Este grupo se denota como $O(1,3)$. Se distingue el grupo propio de Lorentz que es la parte de grupo conectada continuamente con la identidad. Este otro corresponde a matrices de determinante 1 y que con un signo positivo en la componente $\Lambda^0{}_0$. Se denota como $SO\uparrow(1,3)$. Por construcción este grupo no incluyte a la inversión espacial y a la temporal.

boost: Son tranformaciones especificas del grupo de Lorentz, que corresponden al pasaje de una sistema a otro (no rotado) que se mueve en una dada dirección. No forman un grupo dado que la composicion de dos de ellos no es necesariamente otro boost.

Poincare: Es el grupo extendido que incluye traslaciones en el espacio-tiempo. Es decir, una tranformación de Poincare sera de la forma: $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} + a^{\nu}$, con a^{ν} constantes y Λ del grupo de Lorentz.

Rotaciones: el grupo de transformaciones espaciales (en R^3) que deja invariante la forma cuadratica euclidea. Es por tanto un subgrupo del de Lorentz. Se denota como $SO(3)$. $O(3)$ es el grupo extendido que incluye inversiones espaciales.

Galileo: seria la versión no relavista del grupo de Poincare. Esta dado por las rotaciones espaciales, el boost de la fisica newtoniana y las traslaciones espacio-temporales.