3. **Ecuaciones relativistas.** Considera la representación de Weyl de las matrices γ:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2x2} \\ 1_{2x2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Plantee la ecuación de Dirac para un espinor de la forma $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ y muestre que para $m = 0$ se desacoplan ψ_L y ψ_R.
Solución:
La ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ en la representación de Weyl se escribe como el siguiente sistema

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & \partial_t \\ \partial_t & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \partial_i \\ -\sigma^i \partial_i & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & I_{2\times 2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

De modo que obtenemos para los espinores ψ_R y ψ_L
$\begin{cases} i(\partial_t + \sigma^i \partial_i)\psi_R = m\psi_L \\ i(\partial_t - \sigma^i \partial_i)\psi_L = m\psi_R \end{cases} \xrightarrow[m=0]{} \begin{cases} (\partial_t + \sigma^i \partial_i)\psi_R = 0 \\ (\partial_t - \sigma^i \partial_i)\psi_L = 0 \end{cases}$
Para escribir las ecuaciones de una forma un poco más compacta defino $\sigma^\mu = (I_{2\times 2}, \overline{\sigma})$ y $\overline{\sigma}^\mu (I_{2\times 2}, -\overline{\sigma})$.
De modo que $(\partial_t + \sigma^i \partial_i) = \sigma^\mu \partial_\mu$ y $(\partial_t - \sigma^i \partial_i) = \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu$ y por lo tanto las ecuaciones son

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L, \quad i\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R$$

Claramente el sistema se desacopla si $m = 0$.

b) Asuma $m \neq 0$ y proponiendo soluciones del tipo onda plana, o sea proporcionales a $e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$, muestre que vale $m^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2$. Escriba explícitamente las cuatro soluciones linealmente independientes (análogas a las encontradas en la práctica en la representación de Dirac)
Solución:
Proponemos soluciones de la forma $\psi \sim e^{\pm i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ donde el signo negativo corresponde a las soluciones de energía positiva y el signo positivo a las de energía negativa.
Aplicando las ecuaciones de Dirac obtenemos

$$\begin{cases} m\psi_L = \mp(\omega - \sigma^i k_i)\psi_R = \mp \overline{\sigma}^\mu k_\mu \psi_R \\ m\psi_R = \mp(\omega + \sigma^i k_i)\psi_L = \mp \sigma^\mu k_\mu \psi_L \end{cases}$$

Si multiplicamos por m en una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y reemplazando $m\psi_R$ por la segunda llegamos a

$$m^2 \psi_L = (\overline{\sigma}^\nu k_\nu)(\sigma^\mu k_\mu)\psi_L = (\omega - \sigma^j k_j)(\omega + \sigma^i k_i)\psi_L \underset{\text{Ayuda}}{=} (\omega^2 - |\vec{k}|^2)\psi_L$$

De la cual obtenemos la relación de dispersión $m^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2$ *
Ahora encontremos cuatro soluciones linealmente independientes.
Soluciones de energía positiva:
Para esto vamos a quedarnos con las ecuaciones $\psi_R = \frac{(\omega + \sigma^i k_i)}{m}\psi_L = \frac{\sigma^\mu k_\mu}{m}\psi_L$. Reemplazando en ψ

$$\psi \sim e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \frac{(\omega + \sigma^i k_i)}{m}\psi_L \end{pmatrix} = e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \frac{\sigma^\mu k_\mu}{m}\psi_L \end{pmatrix}$$

*Hay otra forma, un poco más sofisticada, de llegar a esta relación. Aplicando $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$ a la ecuación de Dirac. Esto nos da $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = -(\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + im\gamma^\mu \partial_\mu - im\gamma^\nu \partial_\nu + m^2)\Psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0$. Ahora recordemos que $\gamma^\nu \gamma^\mu = \frac{\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} + [\gamma^\nu, \gamma^\mu]}{2}$. Entonces al contraerlo con $\partial_\nu \partial_\mu$ solo sobrevive el anticonmutador ya que el conmutador es antisimétrico. De modo que $\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \frac{\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} + [\gamma^\nu, \gamma^\mu]}{2} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \partial_\nu \partial_\mu = \eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu = \partial^\mu \partial_\mu$. Y por lo tanto la llegamos a $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0$. Y si $\partial_\mu = -ip_\mu$ queda $(-p^\mu p_\mu + m^2)\Psi = 0 = (-\omega^2 + |\vec{p}|^2 + m^2)\Psi = 0 \longrightarrow m^2 = \omega^2 - |\vec{p}|^2$

Esta solución ya es la correcta para $m \neq 0$ pero si escribimos $\psi_L = (\omega - \sigma^i k_i)\xi = \overline{\sigma}^\mu k_\mu \xi$ reescribimos la solución como

$$\psi \sim e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} \overline{\sigma}^\mu k_\mu \xi \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m}\overline{\sigma}^\mu k_\mu \xi \end{pmatrix} = e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} \overline{\sigma}^\mu k_\mu \xi \\ m\xi \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, las soluciones de energía negativa son análogas

Soluciones de energía negativa:

Tomando las ecuaciones $\psi_L = -\frac{(\omega - \sigma^i k_i)}{m}\psi_R = -\frac{\overline{\sigma}^\mu k_\mu}{m}\psi_R$

$$\psi \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} -\frac{\overline{\sigma}^\mu k_\mu}{m}\psi_R \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

Y con la transformación $\psi_L = -(\omega + \sigma^i k_i)\chi = -\sigma^\mu k_\mu \chi$ llegamos a

$$\psi \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \begin{pmatrix} m\chi \\ -\sigma^\mu k_\mu \chi \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, las cuatro soluciones linealmente independientes son

$$e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \left\{ \begin{pmatrix} \overline{\sigma}^\mu k_\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\sigma}^\mu k_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\} \quad e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \left\{ \begin{pmatrix} m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\sigma^\mu k_\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -\sigma^\mu k_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\}$$

Un error típico fue suponer que las cuatro soluciones linealmente independientes son

$$e^{-ik_\mu x^\mu} \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\}$$

Veamos que hay dos que son linealmente dependiente de la otras. Encontremos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Entonces

$\frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \omega + k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & \omega - k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega+k_z}{m} \\ \frac{k_x+ik_y}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Reemplazando en las otras ecuaciones

$\frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \omega - k_z & -(k_x - ik_y) \\ -(k_x + ik_y) & \omega + k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega+k_z}{m} \\ \frac{k_x+ik_y}{m} \end{pmatrix}$

$\frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\omega-k_z)(\omega+k_z)-(k_x-ik_y)(k_x+ik_y)}{m^2} \\ \frac{-(k_x+ik_y)(\omega+k_z)}{m} + \frac{(\omega+k_z)(k_x+ik_y)}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2-|\vec{k}|^2}{m^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

De manera que $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{\omega+k_z}{m} \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \frac{k_x+ik_y}{m} \begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Y análogamente $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \frac{(\omega+\sigma^i k_i)}{m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{k_x-ik_y}{m}\begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} + \frac{\omega-k_z}{m}\begin{pmatrix} \frac{(\omega-\sigma^i k_i)}{m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

Concluyendo entonces que estás soluciones son linealmente dependientes. La clave está en que al considerar esa diferencia de signos en el exponente de la fase global se obtiene una diferencia de signos relativo entre el primer y el segundo par de componentes del espinor. Esto es $m\psi_L = \mp\overline{\sigma}^\mu k_\mu \psi_R$ para $e^{\pm k_\mu x^\mu}$.

c) Asuma $m = 0$. Repita el ítem anterior (*). Muestre que las soluciones encontradas son autoestados de helicidad $h = \vec{S}\hat{P}$ (no es necesario hacer cuentas!).

Solución:

Si $m = 0$, volvemos a las ecuaciones que ahora desacoplan en

$$\begin{cases}(\omega - \sigma^i k_i)\psi_R = 0\\ (\omega + \sigma^i k_i)\psi_L = 0\end{cases}$$

Aplicando $(\omega + \sigma^i k_i)$ en la primera ecuación obtenemos

$$0 = (\omega + \sigma^i k_i)(\omega - \sigma^i k_i)\psi_R = (\omega^2 - |\vec{k}|^2)\psi_R$$

Análogamente para ψ_L.

Entonces $\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0 = m^2$, y por lo tanto $\omega = |\vec{k}|$ (donde tomamos la convención de $\omega > 0$).

Para encontrar las soluciones linealmente independientes simplemente evaluamos $m = 0$ en las soluciones que obtuvimos anteriormente. Entonces

$$e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left\{\begin{pmatrix}\overline{\sigma}^\mu k_\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\overline{\sigma}^\mu k_\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right\} \quad e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\left\{\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \sigma^\mu k_\mu\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \sigma^\mu k_\mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right\}$$

Si no se nos hubieran ocurrido esas transformaciones para evitar ese factor $\frac{1}{m}$ podemos llegar también a estas soluciones usando la ayuda.

Dado un vector χ, la ayuda nos dice que $(\omega + \sigma^i k_i)(\omega - \sigma^j k_j)\chi = (\omega^2 - |\vec{k}|^2)\chi = 0$; y la ecuación para ψ_L es $(\omega + \sigma^i k_i)\psi_L = 0$. De modo que el operador $(\omega - \sigma^j k_j)$ manda cualquier vector χ a una solución de ψ_L; por lo que $\psi_L = (\omega - \sigma^j k_j)\chi$. Análogamente $\psi_R = (\omega + \sigma^j k_j)\chi$. Y como ya mostramos que se desacoplan obtenemos las soluciones de arriba.

Otro error típico fue suponer que si $\psi_L \neq 0$, y como $(\omega + \sigma^i k_i)\psi_L = 0$ entonces $(\omega + \sigma^i k_i) = 0$. Pero esto no puede ser ya que

$$(\omega + \sigma^i k_i) = \begin{pmatrix}\omega + k_z & k_x - ik_y\\ k_x + ik_y & \omega - k_z\end{pmatrix} = 0$$

Pero sumando y restando las componentes cruzadas llegamos a que $k_x = k_y = k_z = \omega = 0$. Y lo mismo ocurre si pensamos que $(\omega - \sigma^i k_i) = 0$. Acá solo falta recordar que los operadores pueden tener núcleo.

Finalmente, y a pesar de no haber obtenido las soluciones para ψ_L y ψ_R, podemos ver que estas son autoestados de helicidad. Para esto simplemente tenemos que notar que de las ecuaciones desacopladas y sabiendo que $\omega = |\vec{k}|$ es

$$\frac{k_i}{|\vec{k}|}\sigma^i\psi_R = \psi_R \quad \text{y} \quad \frac{k_i}{|\vec{k}|}\sigma^i\psi_L = -\psi_L$$

Y como $\psi = \begin{pmatrix}\psi_L\\0\end{pmatrix}$ o $\psi = \begin{pmatrix}0\\ \psi_R\end{pmatrix}$, entonces $h\psi = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\hat{k}_i\sigma^i & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\hat{k}_i\sigma^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\psi_L\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\psi$ y análogamente $h\begin{pmatrix}0\\ \psi_R\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \psi_R\end{pmatrix}$

*Ayuda: $\omega^2 - |\vec{k}|^2 = (\omega - \vec{\sigma}\cdot\vec{k})(\omega + \vec{\sigma}\cdot\vec{k})$