2do parcial E4 2do cuatrimestre 2019 resuelto

1.

1.1.

El lagrangiano total es $\mathcal{L} = \overline{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m\overline{\Psi}\Psi$, donde Ψ es un campo de Dirac y $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ es el término cinético del campo de Maxwell (recordemos que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$). Además para hacer interactuar el fermión con el fotón reemplazamos la derivada usual ∂_μ del lagrangiano del fermión libre por la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$. Expandiendo el lagrangiano y nombrando explícitamente sus términos

$$\mathcal{L} = \underbrace{\overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi}_{\text{Fermión libre}} - \underbrace{g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi}_{\text{Interacción}} - \underbrace{\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{Electromagnético}}$$

1.2.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$.
Para este lagrangiano hay 3 posibles ϕ: $\Psi, \overline{\Psi}$ y A_μ.
Para Ψ: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -m\overline{\Psi} - g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu$ y $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = i\partial_\mu \overline{\Psi}\gamma^\mu$

$$i\partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma^\mu) + m\overline{\Psi} + g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu = 0 \tag{1}$$

Para $\overline{\Psi}$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\Psi}} = i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi - g\gamma^\mu A_\mu \Psi$ y $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})} = 0$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi - g\gamma^\mu A_\mu \Psi = 0 \tag{2}$$

Para A_μ: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -g\overline{\Psi}\gamma^\nu \Psi$. Ahora tenemos que derivar $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Antes notemos que

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu - \underbrace{F_{\mu\nu}\partial^\nu A^\mu}_{F_{\nu\mu}\partial^\mu A^\nu} = F_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu - \underbrace{F_{\nu\mu}}_{-F_{\mu\nu}}\partial^\mu A^\nu = 2F_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}F_{\mu\nu}\partial_\sigma A_\rho = 2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho - \partial_\nu A_\mu \partial_\sigma A_\rho)$$

Entonces

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta \partial_\gamma A_\delta - \partial_\beta A_\alpha \partial_\gamma A_\delta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta \partial_\gamma A_\delta + \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\delta \partial_\alpha A_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha \partial_\gamma A_\delta - \delta^\mu_\gamma \delta^\nu_\delta \partial_\beta A_\alpha)$$

$$= 2(\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta}\partial_\gamma A_\delta + \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\partial_\alpha A_\beta - \eta^{\nu\gamma}\eta^{\mu\delta}\partial_\gamma A_\delta - \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\partial_\beta A_\alpha) = 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 4F^{\mu\nu}$$

Ahora si podemos calcular $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4}\partial_\mu \frac{\partial F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Ahora si estamos en condiciones de derivar Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\overline{\Psi}\gamma^\nu \Psi = 0 \tag{3}$$

Veamos que son invariantes de gauge. Recordemos como transforman los campos. $\Psi' = e^{-ig\alpha(x)}\Psi$, $\overline{\Psi'} = e^{ig\alpha(x)}\overline{\Psi}$ y $A'_\mu = A_\mu + (\partial_\mu \alpha)$.
Para Ψ queremos ver que (2) se mantiene igual al aplicar las transformaciones. Entonces

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' - g\gamma^\mu A'_\mu\Psi' - m\Psi' = i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{-ig\alpha(x)}\Psi) - g\gamma^\mu(A_\mu + \partial_\mu\alpha)e^{-ig\alpha(x)}\Psi - me^{-ig\alpha(x)}\Psi$$

$$= i\gamma^\mu e^{-ig\alpha(x)}(\partial_\mu\Psi) + g\gamma^\mu(\partial_\mu\alpha(x))(e^{-ig\alpha(x)}\Psi) - g\gamma^\mu A_\mu e^{-ig\alpha(x)}\Psi - g\gamma^\mu(\partial_\mu\alpha(x))e^{-ig\alpha(x)}\Psi - me^{-ig\alpha(x)}\Psi$$

$$= e^{-ig\alpha(x)}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - g\gamma^\mu A_\mu\Psi - m\Psi\right] = 0$$

El resultado es análogo para $\overline{\Psi}$.

Ahora para A_μ queremos que (3) siga valiendo. En primer lugar es claro que

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\alpha - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu\alpha = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Finalmente, es claro que

$$g\overline{\Psi'}\gamma^\nu\Psi' - \partial_\mu F'^{\mu\nu} = ge^{ig\alpha(x)}\overline{\Psi}\gamma^\nu(e^{-ig\alpha(x)}\Psi) - \partial_\mu F'^{\mu\nu} = g\overline{\Psi}\gamma^\nu\Psi - \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

1.3.

La corriente es $J^\mu = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a - F^\mu$ con F^μ tal que $\partial_\mu F^\mu = \partial\mathcal{L}$

Sabemos que la simetría global del lagrangiano es $U(1)$. Entonces transformamos $\Psi' = e^{-ig\alpha}\Psi$, de modo que $\delta\Psi = -ig\Psi$ y $\delta\overline{\Psi} = ig\overline{\Psi}$.

Puesto que ahora la fase no depende de la posición, esta transformación no afecta al termino que va como la derivada de Ψ. Entonces las fases entre Ψ y $\overline{\Psi}$ se cancelan dejando $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ y por lo tanto $\partial\mathcal{L} = 0 = \partial_\mu F^\mu$. Por lo que F^μ es constante y lo podemos tomar igual a 0.

Luego tenemos

$$J^\mu = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}}_{i\overline{\Psi}\gamma^\mu}(-ig\Psi) + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\Psi})}}_{0}(ig\overline{\Psi}) = g\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

Esto nos permite escribir la ecuación (3) como $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$.

Ya mostramos en el item anterior que este termino es invariante de gauge. Veamos ahora que es conservada. Para esto tenemos que calcular $\partial_\mu J^\mu$.

$$\partial_\mu J^\mu = g\left[\partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma^\mu)\Psi + \overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\Psi)\right]$$

Ambas derivadas se despejan de (1) y (2) como

$\partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma^\mu) = im\overline{\Psi} + ig\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu$ y $\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = -im\Psi - ig\gamma^\mu A_\mu\Psi$.

Finalmente $\partial_\mu J^\mu = g\left[im\overline{\Psi}\Psi + ig\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - im\overline{\Psi}\Psi - ig\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\right]\Psi = 0$ y por lo tanto la corriente es conservada.

2.

2.1.

El lagrangiano puede reescribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{I}_{3x3} - M\right)\Psi$$

Para que el Lagrangiano tenga simetría U(3) se debe poder multiplicar al campo por una matriz unitaria de 3x3, Ω de manera tal que el lagrangiano quede invariante.

$$\mathcal{L}' = \overline{\Psi}\Omega^\dagger\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{I}_{3x3} - M\right)\Omega\Psi = \overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{I}_{3x3} - M + \Omega^{-1}[\Omega, M]\right)\Psi$$

Donde Ψ es el triplete de espinores originales El lagrangiano queda invariante si y solo si $[\Omega, M] = 0$. Como Ω puede ser cualquier matriz unitaria, la única forma de que conmuten para toda Ω es que M sea múltiplo de la identidad. Es decir, las 3 masas deben ser iguales.

Si en cambio se quiere que sea invariante antes U(2)xU(1) Ω no es una matriz arbitraria de 3x3 sino que es una matriz con un bloque de 2x2 y un bloque de 1x1.

$$\Omega_{U(2)xU(1)} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces para que el conmutador sea 0 no hace falta pedir que las 3 masas sean iguales, ya que el conmutador de dos matrices por bloques es el conmutador de los bloques. El bloque inferior conmuta trivialmente por ser de 1x1, el bloque superior de vuelta solo conmutará con matrices múltiplo de la identidad en el bloque 2x2, por lo que solo basta pedir que $m_1 = m_2$.

2.2.

Para hacer invariante de gauge al lagrangiano se reemplaza la derivada por la derivada covariante

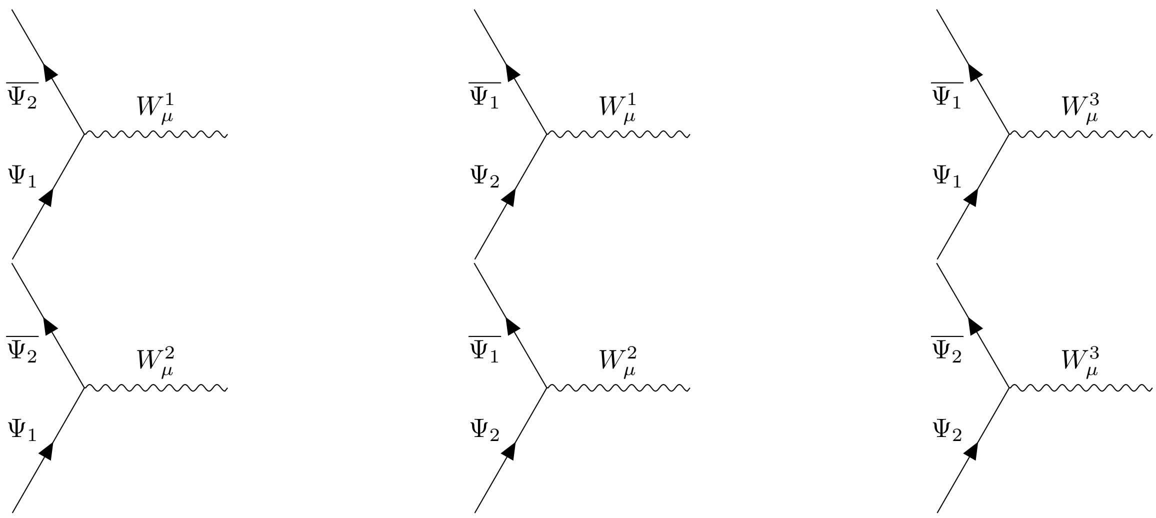
$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igW^a_\mu T_a$$

Donde los T_a son los generadores del grupo por el cual se quiere gaugear y los W^a_μ son los campos introducidos, tantos como generadores haya. Como se quiere gaugear SU(2) y el número de generadores para SU(N) es N^2-1, habrá 3 campos de gauge. También es necesario introducir el término cinético para los campos de Gauge, el cual es $Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ con $G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}T_a$ y $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - gf^a_{bc}W^b_\mu W^c_\nu$ con f^a_{bc} la constante de estructura del grupo, que en el caso de SU(2) es el tensor de Levi-Civita. El término cinético es tal que es invariante ante las transformaciones que deben satisfacer los campos de gauge para mantener la invariancia del lagrangiano.

Los términos relevantes para interacción vienen dados por los términos de la forma $ig\overline{\Psi}\gamma^\mu W^a_\mu T_a \Psi$ donde ahora Ψ es un doblete de espinores en lugar de un triplete porque nos olvidamos de la tercer componente. Los generadores de SU(2) son las matrices de Pauli por lo que los términos existentes serán

$$-g[W^1_\mu(\overline{\Psi_1}\gamma^\mu\Psi_2 + \overline{\Psi_2}\gamma^\mu\Psi_1) + W^2_\mu(-i\overline{\Psi_1}\gamma^\mu\Psi_2 + i\overline{\Psi_1}\gamma^\mu\Psi_2) + W^3_\mu(\overline{\Psi_1}\gamma^\mu\Psi_1 - \overline{\Psi_2}\gamma^\mu\Psi_2)]$$

Estos términos dan lugar a los siguientes vértices:



Los términos con W^1_μ y W^2_μ se pueden reagrupar con la siguiente definición

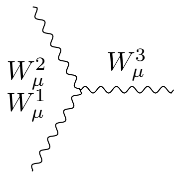
$$W^\pm_\mu = \frac{W^1_\mu \mp iW^2_\mu}{\sqrt{2}}$$

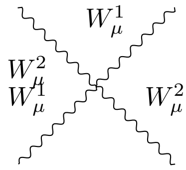
Los términos de interacción relevantes se reescriben como

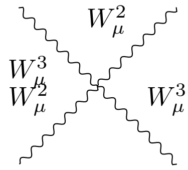
$$-\frac{g}{\sqrt{2}}\left[\overline{\Psi_1}\gamma^\mu W^+_\mu \Psi_2 + \overline{\Psi_2}\gamma^\mu W^-_\mu \Psi_1\right]$$

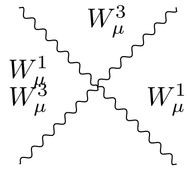
Los vértices que surgen de estos términos son

Por otro lado el término cinético de los bosones también da lugar a vértices. $2Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = G^a_{\mu\nu}G_a^{\mu\nu} = (\partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - gf^a_{bc}W^b_\mu W^c_\nu)(\partial^\mu W^\nu_a - \partial^\nu W^\mu_a - gf^{b'c'}_a W^\mu_{b'} W^\nu_{c'}) = (...) + g\partial_\mu W^a_\nu f^{b'c'}_a W^\mu_{b'} W^\nu_{c'} + g^2 f^a_{bc} f^{b'c'}_a W^b_\mu W^c_\nu W^\mu_{b'} W^\nu_{c'}$. La constante de estructura es 0 si dos índices son iguales por lo que en el término cúbico los 3 campos deben ser distintos (y como solo bay 3 campos, hay un solo vertice posible). Las constantes de estructura del término cuártico indican que $b, c, b'yc'$ son diferentes a a y que $b \neq c, b' \neq c'$. Esto indica que los vértices involucran dos campos, cada uno apareciendo dos veces. Los vértices provenientes de los términos cinéticos son entonces:



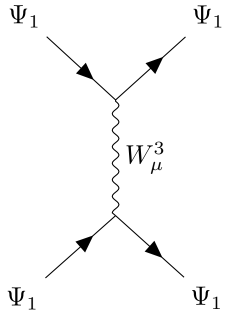






2.3.

$1+1 \rightarrow 1+1$



$1+\overline{2} \rightarrow \overline{1}+2$: Este proceso no puede existir porque la simetría global U(2) del lagrangiano tiene un subgrupo que es U(1)xU(1), es decir, un U(1) global para cada partícula. Tener invariancia U(1) global implica conservación del número de partículas menos antipartículas de cada especie y en el proceso no ocurre. En manera análoga el color se conserva para una simetría SU(3) de color.

$1+\overline{2} \rightarrow 2+\overline{3}$: Este proceso no puede existir. Si los fermiones 1 y 2 tienen simetría SU(2) entonces su doblete tiene una simetría global U(1), lo que quiere decir que la cantidad de partículas del doblete menos la cantidad de antipartículas es invariante. En el proceso hay en el estado inicial una partícula y una antipartícula pero en el estado final solo hay una partícula, ya que el fermión 3 no cuenta al no ser parte del doblete que respeta la simtería.

3.

3.1.

Los términos de interacción entre fermiones y el B_μ y el W_μ^3 son los siguientes:

$$\mathcal{L} = (...) + g'\frac{Y}{2}\overline{\Psi}\gamma^\mu B_\mu \Psi + g\overline{\Psi}\gamma^\mu W_\mu^3 T_3 \Psi$$

Separando el lagrangiano en su parte right y left, y recordando que los generadores T_a son nulos para la parte right se tiene

$$\mathcal{L}_L = (...) + g'\frac{Y^L}{2}\overline{\Psi_L}\gamma^\mu B_\mu \Psi_L + g\overline{\Psi_L}\gamma^\mu W_\mu^3 T_3 \Psi_L \qquad \mathcal{L}_R = (...) + g'\frac{Y^R}{2}\overline{\Psi_R}\gamma^\mu B_\mu \Psi_R$$

Además, como $Q = T_3 + Y/2$ y $Q_s = -\frac{1}{3}$ y su T_3 vale $-\frac{1}{2}$ para la parte left por ser un quark de 'abajo' y 0 para la parte right porque los generadores de la parte right son nulos, obtengo que $Y_s^R = -\frac{2}{3}$ y $Y_s^L = \frac{1}{3}$. Ahora reescribo los términos anteriores además reescribiendo B_μ y W_μ^3 como combinación de A_μ y Z_μ e inmediatamente me olvido de los términos con A_μ. Recuerdo que $B_\mu = cos(\theta)A_\mu - sin(\theta)Z_\mu$ y $W_\mu^3 = cos(\theta)Z_\mu + sin(\theta)A_\mu$

$$\mathcal{L}_L = (...) - \frac{g'}{6}sin(\theta)\overline{\Psi_L}\gamma^\mu Z_\mu \Psi_L - \frac{1}{2}gcos(\theta)\overline{\Psi_L}\gamma^\mu Z_\mu \Psi_L \qquad \mathcal{L}_R = (...) + \frac{g'}{3}sin(\theta)\overline{\Psi_R}\gamma^\mu Z_\mu \Psi_R$$

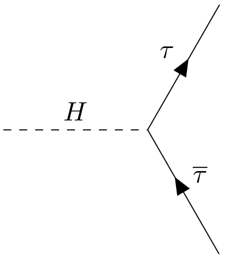
Multiplico y divido por los senos y cosenos apropiados para que aparezca e y reagrupo

$$\mathcal{L} = (...) - Z_\mu e\left[\left(\frac{sin(\theta)}{6cos(\theta)} + \frac{cos(\theta)}{2sin(\theta)}\right)\overline{\Psi_L}\gamma^\mu \Psi_L - \frac{sin(\theta)}{3cos(\theta)}\overline{\Psi_R}\gamma^\mu \Psi_R\right]$$

Como θ es un ángulo chico, el acople left es mayor a 1 y el right menor a 1, como un ejemplo sencillo para mostrar que ambos acoples son distintos.

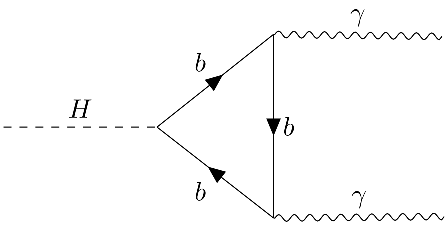
3.2.

Como el τ tiene masa, el decaimiento del Higgs a $\tau + \overline{\tau}$ es sencillo:



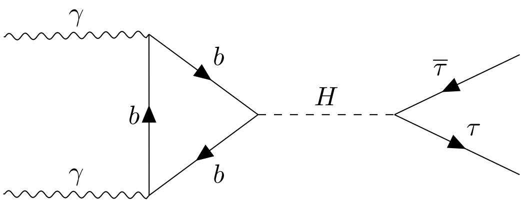
Donde el término de lagrangiano asociado al único vértice es $\frac{m_\tau}{v} h\overline{\Psi}\Psi$.

Como los fotones no tienen masa, el decaimiento a dos fotones tiene que involucrar algo que acople tanto al Higgs como al fotón, es decir, cualquier partícula cargada con masa, por ejemplo el quark b:



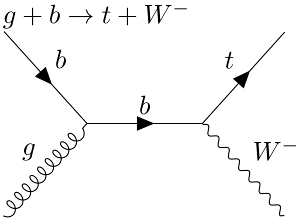
Los términos de lagrangiano involucrados son, al igual que antes, el de acople a Higgs $\frac{m_b}{v} h\overline{\Psi}\Psi$ y el de acople electromagnético $g\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi$

El proceso completo tiene el siguiente diagrama

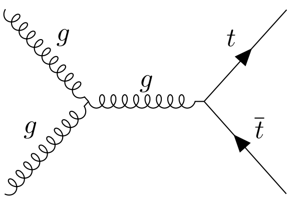


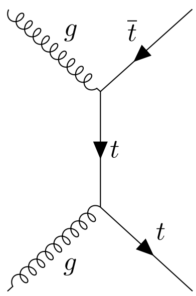
3.3.

$g + b \rightarrow t + W^-$



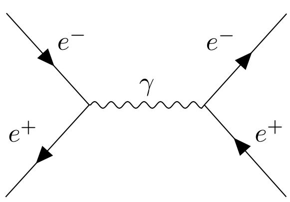
$g + g \rightarrow t + \bar{t}$

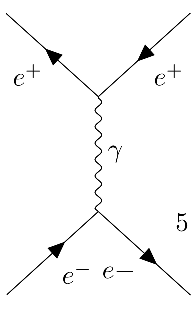


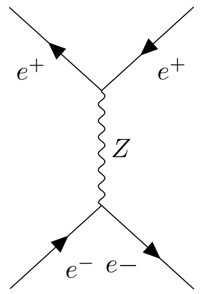


$e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ + d + \overline{u}$: no es posible porque no se conserva el número leptónico. En el estado inicial hay un leptón y un antileptón y en el estado final hay un antileptón.

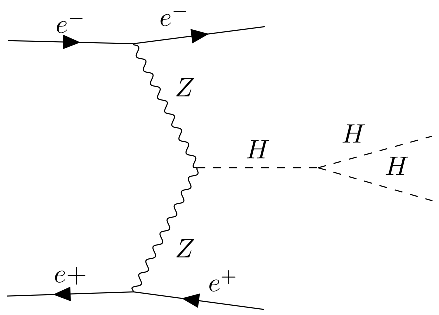
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$







$e^- + e^+ \to e^- + e^+ + h + h$: hay muchísimas posibilidades, dibujo solo una



$u + \overline{d} \to d + \overline{u}$: no es posible, el estado inicial tiene carga eléctrica 1 y el estado final tiene carga -1 (caso completamente análogo al 2.3.iii).