4.4)

Considere la simetría de SU(2) y 3 partículas en la representación $j = 1/2$

Transformaciones que forman el grupo SU(2) pueden ser transformaciones de isospin, transformaciones de spin, de momento angular orbital, etc.

a) Muestre (construyéndolo explícitamente) que el espacio de Hilbert total se descompone en suma de representaciones irreducibles, dos $j = 1/2$ y una $j = 3/2$

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2_{MA} \oplus 2_{MS} \oplus 4$$

Lo que me pide es que encuentre combinaciones lineales de los estados $\{|1/2, m_1, 1/2, m_2, 1/2, m_3\rangle\} = \{|1/2, m_1\rangle \otimes |1/2, m_2\rangle \otimes |1/2, m_3\rangle\}$ tales que el espacio de estados se separa en sectores que no se mezclan entre sí cuando le aplico una transformación de SU(2) (Por ejemplo, una transformación de SU(2) no puede llevarme de un estado $|0,0\rangle$ a otro $|1, m\rangle$)

$$\Rightarrow \underbrace{\overset{J_1}{|1/2, m_1\rangle} \otimes \overset{J_2}{|1/2, m_2\rangle}} \otimes \overset{J_3}{|1/2\, m_3\rangle}$$

$$\overset{J_{aux}\ m_{aux}}{|0,0\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overset{m_1\ m_2}{|1/2, -1/2\rangle} - \overset{m_1\ m_2}{|-1/2, 1/2\rangle}\right) \quad ; \quad \overset{J_{aux}\ m_{aux}}{|1, 1\rangle} = \overset{m_1\ m_2}{|1/2, 1/2\rangle}$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overset{m_1\ m_2}{|1/2, -1/2\rangle} + \overset{m_1\ m_2}{|-1/2, 1/2\rangle}\right)$$

$$|1\,-1\rangle = \overset{m_1\ m_2}{|-1/2, -1/2\rangle}$$

Usando la tabla de Clebsh-Gordan puedo combinar dos de las tres partículas (por ejemplo, la 1 y la 2)

$$\overset{J_1}{|1/2, m_1\rangle} \otimes \overset{J_2}{|1/2, m_2\rangle} \otimes \overset{J_3}{|1/2, m_3\rangle} \longrightarrow |J_{aux}, m_{aux}\rangle \otimes |1/2, m_3\rangle$$

[redacted]

Para pasar a esta base sumo los J y m usando la tabla de Clebsh Gordan

para pasar a esta base uso la expansión de $|J_{aux}, m_{aux}\rangle$ y agrego m_3 al final

Base $\vert J_{aux}\, m_{aux}\, J_3 = 1/2\, m_3\rangle$	Base $\vert m_1\, m_2\, m_3\rangle$	Base $\vert J_{TOT}, m_{TOT}\rangle$
$\vert J_{aux}, m_{aux}\rangle \otimes \vert 1/2\; m_3\rangle$		
$\vert 0,0\rangle \otimes \vert 1/2\; 1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1/2\; -1/2\; 1/2\rangle - \vert -1/2\; 1/2\; 1/2\rangle)$	$\vert 1/2\; 1/2\rangle$
$\vert 0,0\rangle \otimes \vert 1/2, -1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1/2\, -1/2\, -1/2\rangle - \vert -1/2\; 1/2\, -1/2\rangle)$	$\vert 1/2\; -1/2\rangle$
$\vert 1\,1\rangle \otimes \vert 1/2\; 1/2\rangle$	$\vert 1/2\; 1/2\; 1/2\rangle$	$\vert 3/2\; 3/2\rangle$
$\vert 1\,1\rangle \otimes \vert 1/2\; -1/2\rangle$	$\vert 1/2\; 1/2\; -1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\vert 3/2\; 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 1/2\, 1/2\rangle$ ①
$\vert 1\,0\rangle \otimes \vert 1/2\; 1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1/2\, -1/2\; 1/2\rangle + \vert -1/2\; 1/2\; 1/2\rangle)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\vert 3/2\; 1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\vert 1/2\; 1/2\rangle$ ②
$\vert 1\,0\rangle \otimes \vert 1/2\; -1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1/2, -1/2\, -1/2\rangle + \vert -1/2, 1/2, -1/2\rangle)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\vert 3/2\, -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\vert 1/2\; -1/2\rangle$ ③
$\vert 1,-1\rangle \otimes \vert 1/2\; 1/2\rangle$	$\vert 1/2, -1/2, 1/2\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\vert 3/2\; -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\vert 1/2\; -1/2\rangle$ ④
$\vert 1\; -1\rangle \otimes \vert 1/2\; -1/2\rangle$	$\vert -1/2\; -1/2\; -1/2\rangle$	$\vert 3/2\; -3/2\rangle$

No me quedaron estados de J_{TOT} definido (i.e. muchos no son autoestados de J_{TOT} ⇒ busco combinaciones lineales de estos que tengo que si sean autoestados)

- ① + $\sqrt{2}$ ②

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|3/2\; 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\cancel{|1/2\; 1/2\rangle}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|3/2\; 1/2\rangle - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}|1/2\; 1/2\rangle}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}|3/2\; 1/2\rangle \quad (\text{Base } |J_{TOT}\, m_{TOT}\rangle)$$

$$|1/2\; 1/2\; -1/2\rangle + \cancel{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(|1/2\, -1/2\; 1/2\rangle + |-1/2\; 1/2\; 1/2\rangle) = |1/2\; 1/2\; -1/2\rangle + |1/2\; -1/2\; 1/2\rangle + |-1/2\; 1/2\; 1/2\rangle$$

(Base $|m_1\, m_2\, m_3\rangle$)

Igualando

$$\sqrt{3}\,|3/2\; 1/2\rangle = |1/2\, 1/2\, -1/2\rangle + |1/2\, -1/2\; 1/2\rangle + |-1/2\; 1/2\; 1/2\rangle$$

$$|3/2\; 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1/2\, 1/2\; -1/2\rangle + |1/2\, -1/2\; 1/2\rangle + |-1/2\, 1/2\; 1/2\rangle)$$

$\bullet$ ① $- \frac{1}{\sqrt{2}}$ ②

$$\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}|3/2\ 1/2\rangle} + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2\ 1/2\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cancel{\sqrt{\frac{2}{3}}|3/2\ 1/2\rangle} - \frac{1}{\sqrt{3}}|1/2\ 1/2\rangle\right) = \overbrace{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}|1/2\ 1/2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|1/2\ 1/2\rangle$$

$$|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1/2\ {-1/2}\ {+1/2}\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle\right) = |1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle - \frac{1}{2}\left(|1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle\right)$$

Igualando — un signo "-" global no aporta nada en un estado cuántico

$$\sqrt{\frac{3}{2}}|1/2\ 1/2\rangle = \cancel{-}\frac{1}{2}\left(-2|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle + |1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle\right)$$

$$|1/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle + |1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle - 2|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle\right)$$

$$|1/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle + |1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle - 2|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle\right)$$

Haciendo algo similar con ③ y ④, obtengo:

De $|0,0\rangle \otimes |1/2\ m_3\rangle \longrightarrow$ 2 MA

$$\begin{cases} |1/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle - |{-1/2}, 1/2\ 1/2\rangle\right) \\ |1/2\ {-1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1/2, {-1/2}\ {-1/2}\rangle - |{-1/2}\ 1/2\ {-1/2}\rangle\right) \end{cases}$$

De $|1, m_{aux}\rangle \times |1/2\ m_3\rangle \rightarrow$ 2 MS

$$\begin{cases} |1/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle + |1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle - 2|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle\right) \\ |1/2\ {-1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1/2\ {-1/2}\ {-1/2}\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ {-1/2}\rangle - 2|{-1/2}\ {-1/2}\ 1/2\rangle\right) \end{cases}$$

4 simétricas

$$\begin{cases} |3/2\ 3/2\rangle = |1/2\ 1/2\ 1/2\rangle \\ |3/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1/2\ 1/2\ {-1/2}\rangle + |1/2\ {-1/2}\ 1/2\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ 1/2\rangle\right) \\ |3/2\ {-1/2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|{-1/2}\ {-1/2}\ 1/2\rangle + |{-1/2}\ 1/2\ {-1/2}\rangle + |1/2\ {-1/2}\ {-1/2}\rangle\right) \\ |3/2\ {-3/2}\rangle = |{-1/2}\ {-1/2}\ {-1/2}\rangle \end{cases}$$