

Ejercicio 1: Acoplamiento a un resonador LC Considere un circuito formado por un resonador LC acoplado al circuito para un qubit de carga o trasmón, cuyo esquema se presenta en la figura

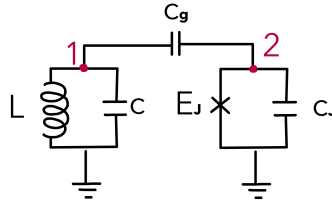


Figure 1: Acoplamiento a circuito LC

- Encuentre las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano y el Hamiltoniano para este sistema.
- Observe cómo se modifican las capacidades asociadas a cada término respecto de las que se encuentran en los Hamiltonianos libres. Tome el límite $c_g \ll c, c_\Sigma$, con $c_\Sigma = c_g + c_J$, sobre las constantes en cada término
- Muestre que en este límite, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = 4 E_c (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 - E_J \cos(\hat{\phi}/\varphi_0) + \hbar \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1)$$

con $\hat{n}_r = c_g/c \hat{q}_1/(2e)$ y \hat{q}_1 la variable de carga asociada al nodo 1.

Puede resultar de utilidad:

- Escribir primero el Hamiltoniano en términos de las variables de flujo y sus derivadas, haciendo el cambio a las variables de carga en un paso posterior.
- Escribir las relaciones entre capacidades usando $c_\Sigma = c_g + c_J$ como denominador. Por ejemplo:

$$\frac{c_g + c_J}{c c_g + c c_J + c_g c_J} = \left(c + \frac{c_g c_J}{c_g + c_J} \right)^{-1}$$

- ¿En qué difiere este Hamiltoniano de aquél encontrado cuando se acopla a una guía de ondas?

Ejercicio 2: Hamiltonianos de interacción materia-radiación Para formarnos una imagen más clara de los modelos que podemos en arquitecturas conformadas por circuitos cuántico, analizamos el Hamiltoniano (1) obtenido previamente de acuerdo a la relación entre parámetros y la base de estados en la que se expandan sus operadores. Para eso:

- i. Expanda explícitamente el cuadrado en el primer término del Hamiltoniano y escriba el operador \hat{n}_r en términos de los operadores de creación y destrucción \hat{a}^\pm de fotones
- ii. Considerando que el circuito localizado se ubica en el régimen transmónico, realice las aproximaciones correspondientes y escriba el Hamiltoniano completo en términos de operadores de creación y destrucción de excitaciones de cada subsistema.
- iii. Sobre el resultado del inciso anterior, realice la aproximación de dos niveles. ¿Qué modelo paradigmático de la electrodinámica cuántica recupera?
- iv. *Discuta* el caso en que el circuito localizado se encuentra en el régimen de qubit de carga.

Observación: _____

Desprecie el término $\propto \hat{n}_r^2$, que induce únicamente una traslación en la frecuencia del resonador.

Ver *Circuit Quantum Electrodynamics*; A. Blais, A. L. Grimsmo, S.M. Girvin y A. Wallraff Rev. Mod. Phys. 93, 025005 (2021). **Pág. 13 y Apéndice A**

Ejercicio 3: Qubit en un entorno a temperatura finita Resolvemos la dinámica de un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico como en el ejercicio 2, pero esta vez el entorno se halla en un estado térmico con temperatura $T \geq 0$. La ecuación maestra que describe la evolución del qubit es en este caso es (en unidades de $\hbar = 1$)

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}) + n_\omega \frac{\gamma}{2}(2\sigma_+ \rho \sigma_- - \{\sigma_- \sigma_+, \rho\}), \quad (2)$$

con $H = \omega/2 \sigma_z$ el Hamiltoniano libre del qubit y $n_\omega = (e^{\omega/(k_B T)} - 1)^{-1}$ el número de ocupación bosónico.

i. Muestre que un observable que actúa sobre el qubit evoluciona según

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle O \rangle &= -i \langle [O, H] \rangle + \\ &+ (n_\omega + 1) \frac{\gamma}{2} \langle \sigma_+ [O, \sigma_-] + [\sigma_+, O] \sigma_- \rangle \\ &+ n_\omega \frac{\gamma}{2} \langle \sigma_- [O, \sigma_+] + [\sigma_-, O] \sigma_+ \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

ii. Derive las *ecuaciones de Bloch* para $\langle \sigma_z \rangle$ y $\langle \sigma_\pm \rangle$, y resuelva.

iii. Usando los valores obtenidos en el inciso (ii), reconstruya el *vector de Bloch*. Calcule su norma y muestre que la misma se contrae inicialmente hacia el interior de la esfera.

iv. Usando el vector de Bloch $\mathbf{s}(t)$ pruebe que la matriz densidad evoluciona según

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} P_1 + e^{-t/T_1}(\rho_{11}(0) - P_1) & \rho_{10} e^{-i\omega t - t/(2T_1)} \\ \rho_{01} e^{i\omega t - t/(2T_1)} & 1 - P_1 - e^{-t/T_1}(\rho_{11}(0) - P_1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

con $P_1 = n_\omega/(1 + 2n_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{11}(t)$ es la probabilidad de excitación asintótica y $T_1 = (1 - 2P_1)/\gamma$ da la escala en la que $\rho(t)$ converge a la solución asintótica. Relacione esta solución con el límite de temperatura nula.

Puede resultar útil

Recordar que el vector de Bloch es un vector de norma unidad que satisface

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z}$