Oscilador armónico cuántico

Ejercicio 1: Hamiltoniano Considerando un oscilador armónico unidimensional, descrito por un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2, \tag{1}$$

con m, k constantes reales.

i. Encuentre el momento canónicamente conjugado p y el Hamiltoniano del sistema clásico. Un sistema con este Hamiltoniano exhibe un movimiento periódico de frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$. Promueva las variables canónicamente conjugadas al estatus de operadores. ¿Qué relaciones de conmutación satisfacen?

ii. Definiendo los operadores *de destrucción* y *de creación*

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\,p\right) \quad ; \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\,p\right), \tag{2}$$

derive las relaciones de conmutación $[a, a^\dagger]$, $[a^\dagger a, a]$, y $[a^\dagger a, a^\dagger]$ y muestre que el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \text{ con } \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{3}$$

cuando se lo escribe en términos de estos operadores.

iii. Encontrar los autoestados de energía se reduce entonces a encontrar los autoestados del operador $\hat{n}$. Puede probarse que los autovalores de $\hat{n}$ son números enteros $n \geq 0$. Usando los resultados de (iii), encuentre el efecto de los operadores de creación y destrucción sobre los autoestados $|n\rangle$ del operador $\hat{n}$.

Ejercicio 2: Evolución temporal Considere un estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)\,|0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle \tag{4}$$

i. Encuentre el estado del sistema para $t > 0$ en la representación de Schrodinger. Usando este resultado, calcule los valores medios $\langle\hat{x}_S\rangle(t)$, $\langle\hat{a}_S\rangle(t)$ y $\langle\hat{n}_S\rangle(t)$ (el subíndice S denota explícitamente que la representación de Schrodinger de los operadores).

ii. Pasando a la representación de Heisenberg, encuentre la ecuación de evolución que satisfacen los operadores $\hat{x}_H(t)$, $\hat{a}_H(t)$ y $\hat{n}_H(t)$ y sus soluciones (el subíndice H denota la representación de Heisenberg). Usando estos resultados, recupere los resultados de (i) para los valores medios de los operadores.

iii. Encuentre la varianza $var(x) = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ en ambas representaciones.

Ejercicio 3: Estados coherentes Se definen los *estados coherentes* de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación,

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,, \text{ con } \alpha \in \mathbb{C} \tag{5}$$

i. Calcule el valor medio y la varianza para el Hamiltoniano y los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$. Demuestre que todo estado coherente satisface la relación de mínima incerteza.
ii. Usando que los autoestados de H $|n\rangle$ pueden escribirse como $|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\,|0\rangle$ demuestre que la expansión de un estado coherente en la base $\{|n\rangle\}$ es

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \tag{6}$$

iii. Ortonormalidad – Calcule el producto interno entre dos estados coherentes distintos. ¿Son los estados coherentes ortogonales? ¿Por qué?
iv. Completitud – Muestre que los estados coherentes forman una base, es decir que satisfacen la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi}\int d\alpha^2\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| = \mathbb{I} \tag{7}$$

v. Evolución temporal – Muestre que la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la representación de Schrödinger es es un nuevo estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. Encuentre la expresión de $\alpha(t)$

Ejercicio 4: Operador desplazamiento Se define el operador unitario *desplazamiento* en el espacio de fases como

$$\mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha\,\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \tag{8}$$

que satisface $\mathcal{D}^{-1}(\alpha) = \mathcal{D}(-\alpha)$

i. Encuentre el efecto de este operador sobre los operadores de creación y destrucción $\mathcal{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}^\dagger\,\mathcal{D}(\alpha)$, $\mathcal{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{a}\,\mathcal{D}(\alpha)$ y sobre los operadores posición y momento $\mathcal{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{x}\,\mathcal{D}(\alpha)$, y $\mathcal{D}^\dagger(\alpha)\,\hat{p}\,\mathcal{D}(\alpha)$
ii. Muestre que el estado $|\alpha\rangle = \mathcal{D}(\alpha)\,|0\rangle$ es un autoestado del operador de destrucción. Escriba $\mathcal{D}(\alpha)\,|0\rangle$ en la base $\{|n\rangle\}$.

Operador densidad

Ejercicio 5: Propiedades del Operador densidad El estado de un sistema cuántico se describe mediante un *operador densidad*, que puede expandirse en una base

$$\rho = \sum p_i \, |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \,, \tag{9}$$

con $\sum_i p_i = 1$. Muestre que

i. En el caso general, $\rho^2 \neq \rho$. ¿Bajo qué circunstancias se satisface la igualdad?
ii. $\rho^\dagger = \rho$
iii. $\mathrm{tr}(\rho^2) \leq 1$. ¿Bajo qué circunstancias se satisface la igualdad?
iv. El operador *matriz densidad reducida* a un subespacio $\mathcal{H}_A$, definido como,

$$\rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{\mathcal{H}}_A}(\rho), \tag{10}$$

con $\bar{\mathcal{H}}_A$ el complemento de $\mathcal{H}_A$, permite calcular valores de expectación de todos los operadores $\hat{O}_A$ que actúan sobre dicho subespacio y por lo tanto representa el estado del subsistema.