Interacción con un campo clásico

Ejercicio 1: Consideremos un átomo en el caso en que resulte válido restringirse a un subespacio de dimensión 2 de su espacio de estados $\{|g\rangle, |e\rangle\}$. En este caso, el Hamiltoniano del átomo está dado por

$$H_a = \frac{\hbar}{2}\omega_a \hat{\sigma}_z, \tag{1}$$

con $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. El átomo se acopla con un campo eléctrico clásico que oscila con frecuencia ω_r, de forma tal que la interacción entre el electrón de átomo y el campo, en la aproximación dipolar, está dada por

$$H_{int} = \hbar\Omega \cos(\omega_r t + \varphi)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \tag{2}$$

con $\hat{\sigma_\pm} = (\hat{\sigma}_x \pm i\, \hat{\sigma}_y)/2$

i. Usando la representación de interacción, y suponiendo $\omega_a \sim \omega_r$ aplique la aproximación de onda rotante (RWA), en la cuál se desprecian los términos de oscilación rápida. Muestre que en este caso

$$H_{int,I} \approx \frac{\hbar}{2}\Omega(\hat{\sigma}_+ \, e^{i\Delta t - i\varphi} + \hat{\sigma}_- \, e^{-i\Delta t + i\varphi}), \tag{3}$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega_r$ es el *detuning*.

ii. Suponga que inicialmente el sistema se encuentra en el estado excitado. Calcule el estado a tiempo $t > 0$ y la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado excitado en función del tiempo $P_e(t)$.

iii. Calcule el valor de expectación de los operadores $\sigma_{x,y,z}$ en función del tiempo.

Modelo de Jaynes Cummings

Ejercicio 2: Consideremos un átomo de dos niveles $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, cuyo Hamiltoniano puede escribirse como

$$H_a = \frac{\hbar}{2}\omega_a \hat{\sigma}_z, \tag{4}$$

con $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado en el interior de una cavidad. El Hamiltoniano del modo de campo electromagnético es

$$H_r = \hbar\omega_r \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

La interacción entre el átomo y el campo se puede escribir, en la aproximación dipolar, como

$$H_{int} = \hbar \frac{\Omega}{2}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \otimes (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \tag{6}$$

de forma que el Hamilltoniano del sistema átomo+cavidad resulta

$$H = H_a + H_r + H_{int}. \tag{7}$$

El objetivo del ejercicio, será realizar la aproximación de onda rotante para obtener el Hamiltoniano del modelo de Jaynes Cummings, y resolverlo explícitamente.

i. Escriba el Hamiltoniano H en la representación de interacción usando el Hamiltoniano *libre* $H_0 = H_a + H_r$. Muestre que de los cuatro términos del Hamiltoniano de interacción $H_{int,I}$, dos de ellos oscilan con una frecuencia $\omega_a + \omega_r$, mientras que los otros dos oscilan con frecuencia $\Delta = \omega_a - \omega_r$.

ii. Considerando $\omega_a \sim \omega_r$, realice la aproximación de onda rotante (RWA). Reescriba el Hamiltoniano H_{JC} aproximado en la representación de Schrödinger.

iii. Definimos el operador número de excitaciones $\hat{N} = |e\rangle\langle e| + \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Muestre $[\hat{N}, H_{JC}] = 0$ y por lo tanto el Hamiltoniano resulta diagonalizable en una base de autoestados de $\hat{N}$. ¿Está degenerado $\hat{N}$?

iv. A partir de (iii), muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce, para el caso $n > 1$, al problema de diagonalizar las matrices de 2×2 correspondientes al subespacio de estados asociado a cada número de excitaciones n. ¿ Qué se tiene en el caso de cero excitaciones?. Diagonalice el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en cada subespacio invariante.

Ejercicio 3: Consideremos un átomo de dos niveles $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ y frecuencia natural ω_a que interactúa resonantemente con el único modo de radiación de una cavidad, de frecuencia $\omega_r = \omega_a$.

Si el átomo se encuentra inicialmente excitado, de forma que el estado inicial del sistema es $|\psi(t)\rangle = |e\rangle \otimes |\phi\rangle$, con

$$|\phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \tag{8}$$

i. ¿Cuál es el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema a tiempo t?

ii. Si el estado inicial del campo es ahora un estado coherente $|\phi\rangle = |\alpha\rangle$. ¿ Cuál es la probabilidad $P(|e\rangle, t)$ de encontrar el átomo en el estado excitado después de un tiempo de interacción t? ¿ Para el caso de α grande podríamos decir que la evolución es análoga a la de un campo clásico? ¿ Sería posible calcular el número n de fotones midiendo $P(|e\rangle, t)$?