Resonador LC

Ejercicio 1: Considere el Hamiltoniano para un resonador LC cuántico

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{c + c_g}(\hat{q} - q_g(t))^2 + \frac{1}{2L}\hat{\phi}^2 \tag{1}$$

i. Haciendo uso de la similitud entre el caso $q_g = 0$ y el Hamiltoniano para el oscilador armónico, defina operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ como combinación lineal de los operadores de carga y flujo, que le permitan llevar el Hamiltoniano de la Eq. (1) a la forma

$$H|_{q_g=0} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2). \tag{2}$$

Exprese la frecuencia ω en términos de los parámetros del circuito

ii. Para los operadores hallados en (i), encuentre la expresión del Hamiltoniano de la Eq. (1) en el caso más general de $q_g(t) \neq 0$

Estados coherentes

Ejercicio 2: Muestre que el número de fotones en un estado coherente $|\alpha\rangle$ es $\langle\hat{n}\rangle = |\alpha|^2$. Calcule la incerteza en las cuadraturas $\{\hat{q}, \hat{\phi}\}$ para este estado.

Ejercicio 3: Muestre que el estado fundamental del Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\,\hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{3}$$

es un estado coherente con $\alpha \propto \Omega_0$. [1]

Ejercicio 4: Generación de estados coherentes Considere un resonador de frecuencia ω_r, que se encuentra inicialmente en el estado de vacío $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. El resonador se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas clásicas, que oscilan con frecuencia ω_d. El acoplamiento puede modelarse, bajo la aproximación de onda rotante con un término

$$H_d \approx \hbar\Omega_0\left(\hat{a}\,e^{i\omega_d\,t} + \hat{a}^\dagger\,e^{-i\omega_d\,t}\right)$$

i. Encuentre y resuelva la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción $\hat{a}$. Muestre con este resultado, que el estado a tiempo t es un estado coherente. ¿Cuál es el $\alpha(t)$ correspondiente?

ii. Calcule el valor medio de excitaciones y la probabilidad de tener cero excitaciones en función del tiempo. En particular, analice los valores que toman estas expresiones en el caso resonante.

[1] Puede ser útil usar la definición de estado coherente en términos de operadores de desplazamiento y las relaciones de conmutación entre $D(\alpha)$, $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, como por ejemplo $\hat{a}D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{a} + \alpha)$

Guía de ondas

Ejercicio 5: Aplicando las ecuaciones de Hamilton al Hamiltoniano para una línea de transmisión se encuentra, en el límite continuo, la ecuación dinámica

$$\partial_t^2\,\phi(x,t) - \frac{1}{c\,l}\partial_x^2\phi(x,t) \tag{4}$$

cuyas soluciones aceptan una expansión en modos

$$\phi(x,t) = \sum_n u_n(x)\,b_n(t) \tag{5}$$

i. Encuentre y resuelva la ecuación para cada modo $u_n(x)$
ii. Para el caso de una línea de transmisión de longitud d no–acoplada, ¿qué condición debe satisfacerse en los extremos? Encuentre las soluciones en este caso, conocido como *línea de transmisión* $\lambda/2$
iii. Si se modifica la situación anterior conectando uno de los dos extremos a tierra, ¿ cómo debe expresarse la nueva condición de contorno? Encuentre las soluciones en este caso, conocido como *linea de transmisión* $\lambda/4$

Ejercicio 6: Se desea ubicar una molécula magnética dentro de una guía de transmisión tipo (a) $\lambda/2$ y (b) $\lambda/4$

i. ¿Qué posición optimiza el acoplamiento entre la molécula y el modo fundamental?
ii. ¿Qué posición optimiza el acoplamiento entre la molécula y el primer armónico?
iii. ¿Dónde debe ubicarse la molécula para que se acople con igual intensidad al modo fundamental y al primer armónico?

Cavidades con disipación El estado cuántico de un resonador con pérdidas puede describirse con la matriz densidad reducida $\rho(t)$. La evolución de $\rho(t)$, puede describirse con la *ecuación maestra* ($\hbar = 1$)

$$\partial_t\rho(t) = -i\,[H_{eff}(t),\rho(t)] + \frac{\kappa}{2}(n_{\omega'}+1)(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \{\hat{a}^\dagger\hat{a},\rho\}) + \frac{\kappa}{2}n_{\omega'}(2\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \{\hat{a}\hat{a}^\dagger,\rho\}), \tag{6}$$

dónde los términos reales del lado derecho dan cuenta de la pérdida y absorción de fotones respectivamente, $H_{eff}(t) = \omega'\hat{a}^\dagger\hat{a} + \Omega(t)\hat{a}^\dagger + \Omega^*(t)\hat{a}$ y $n_{\omega'}$ es el número de ocupación térmico $n_{\omega'} = 1/(e^{\beta\omega'}-1)$. Los parámetros que modulan los efectos no-unitarios son la *constante de disipación* κ y la inversa de la temperatura $\beta = 1/(k_B T)$[2]

Ejercicio 7: Para el caso de un sistema sin driving ($\omega' = \omega, \Omega(t) = 0$) acoplado a un entorno a temperatura cero ($n_{\omega'} = 0$)

[2]Estudiaremos la construcción de ecuaciones maestras en la guía de *Acoplamiento con el mundo exterior*

1. Resuelva analíticamente la ecuación maestra para el estado inicial $|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)\,|0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle$ superposición de un fotón y vacío.
2. Encuentre la ecuación de evolución para el valor medio del operador número de fotones $\left\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \right\rangle(t)$ y su solución
3. Estudie el decaimiento de la *coherencia* $\rho_{01}(t) = \langle 0|\,\rho(t)\,|1\rangle$. ¿Cuán rápido es este decaimiento?