

### Sistemas de dos niveles

**Ejercicio 1: Rotación de Hamiltonianos** Considere el operador unitario

$$U_a(\mathbf{n}) = e^{i\frac{a}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \quad (1)$$

con  $\mathbf{n}$  un vector unitario  $\mathbf{n} = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$  y  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ .

- i. Muestre que el operador  $U_a$  puede escribirse como  $U_a(\mathbf{n}) = \cos(a/2)\mathbb{I} + i\sin(a/2)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$
- ii. Encuentre el efecto de aplicar la transformación  $U_a$  a las matrices de Pauli  $\sigma_{x,y,z}$
- iii. Usando los resultados anteriores y considerando el Hamiltoniano

$$H = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\varepsilon}{2}\sigma_x \quad (2)$$

encuentre la transformación que lo lleva a las formas  $H' = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\varepsilon}{2}\sigma_y$  y  $H'' = \frac{\Delta}{2}\sigma_x + \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z$ . Si el Hamiltoniano original está expresado en la base  $\{|0_z\rangle, |1_z\rangle\}$  de autoestados de  $\sigma_z$ , ¿en qué bases toma  $H$  las formas  $H'$  y  $H''$ ?

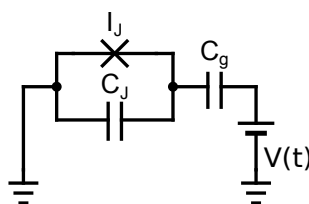
**Ejercicio 2:** Un oscilador armónico de un único modo con un Hamiltoniano cuadrático y operaciones lineales no puede usarse para implementar un qubit. Asuma un modelo general de la forma ( $\hbar = 1$ )

$$H = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + f(t)^*\hat{a}^\dagger + f(t)\hat{a}, \quad (3)$$

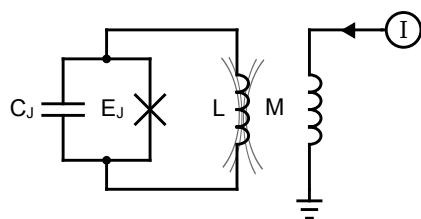
con un driving general  $f(t) \in \mathbb{C}$ . Prueba que empezando en el estado  $|0\rangle$ , es imposible crear un estado de Fock  $|1\rangle$  perfecto.

### Qubits artificiales

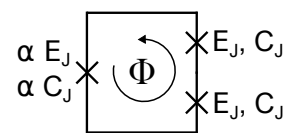
Esquemas de algunos circuitos que permiten implementar qubits y podrían resultarle útiles:



(a) Qubit de carga y transmon



(b) rf-SQUID



(c) Qubit de flujo

**Ejercicio 3: Evolución de un qubit de carga** Siguiendo el experimento realizado por Nakamura y colaboradores<sup>1</sup> se prepara un qubit de carga, cuyo esquema se encuentra en la figura, con  $n_g \sim 0$  y se lo enfría hasta alcanzar la neutralidad de carga  $|0\rangle$ . Luego se lleva el sistema hasta el punto de simetría  $n_g = 1/2$  de manera abrupta, dejándolo evolucionar en esas condiciones durante un tiempo  $t$  luego del cual se retorna al punto  $n_g \sim 0$  y se mide la carga en la isla superconductora.

- i. Escriba el Hamiltoniano del qubit en el punto de simetría  $n_g = 1/2$
- ii. Encuentre el estado del sistema a tiempo  $t$
- iii. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un par de Cooper de exceso al final del experimento?

**Ejercicio 4: Excitaciones del trasmon** Considere el Hamiltoniano (en unidades  $\hbar = 1$ ) del trasmon para los tres niveles de menor energía y una perturbación externa dependiente del tiempo

$$H = (\omega_{12} + \omega_{01}) |2\rangle \langle 2| + \omega_{01} |1\rangle \langle 1| + (\varepsilon_{12}(t) |2\rangle \langle 1| + \varepsilon_{01}(t) |1\rangle \langle 0| + \text{h.c.}), \quad (4)$$

donde  $\omega_{12} = \Delta + \alpha$  y  $\omega_{01} = \Delta$  están relacionadas por una anarmonicidad  $\alpha$ , y las perturbaciones satisfacen  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{01} = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ . El objetivo de este ejercicio es estudiar la dinámica para caracterizar la probabilidad de pérdidas fuera del espacio del qubit.

- i. Aplique al Hamiltoniano una transformación unitaria  $U = e^{-iKt}$ , con  $K = 2\omega |2\rangle \langle 2| + \omega |1\rangle \langle 1|$ . Muestre que, despreciando los términos que oscilan rápidamente, se obtiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_{eff} = (2\delta + \alpha) |2\rangle \langle 2| + \delta |1\rangle \langle 1| + \frac{\varepsilon_0}{2} (|2\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| + \text{h.c.}) \quad (5)$$

- ii. Asuma una anarmonicidad grande  $|\delta + \alpha| \gg |\delta|$  e ignore el tercer estado. Resuelva la dinámica de un estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$  como función del tiempo. ¿Qué condiciones se deben satisfacer para alcanzar un estado  $|1\rangle$  perfecto?. ¿Cómo depende el tiempo  $\tau_{flip}$  de inversión de poblaciones de la perturbación  $\varepsilon_0$ ?
- iii. Restringiéndose al caso resonante  $\delta = 0$  consideraremos las pérdidas al tercer nivel de forma perturbativa. Para eso, puede ser útil reescribir el Hamiltoniano en la base  $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle \pm |1\rangle)$  y pasar a la representación de interacción, expandiendo al orden más bajo en  $\varepsilon_0/\alpha$ . Muestre que la probabilidad de excitación es proporcional a  $|\varepsilon_0|^2/|\alpha|^2$

**Ejercicio 5: Qubit de tres junturas** Observaremos el qubit de flujo de tres junturas, o *de corriente persistente*. El Hamiltoniano para este circuito puede escribirse como

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{C_J(1/2 + \alpha)} q_+^2 + \frac{1}{C_J} q_-^2 - E_J \alpha \cos\left(\frac{\Phi + \phi_+}{\varphi_0}\right) - E_J 2 \cos\left(\frac{\phi_+}{2\varphi_0}\right) \cos\left(\frac{\phi_-}{2\varphi_0}\right). \quad (6)$$

<sup>1</sup>Nakamura, Y., Pashkin, Y. A., & Tsai, J. S. (1999). Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. *nature*, 398(6730), 786-788.

En el experimento de Wal y colaboradores<sup>2</sup>, las dos junturas más grandes tenían una corriente crítica  $I_J = 570nA$  y capacitancia  $C_J = 2.5fF$ , mientras que la juntura más pequeña, lo era por un factor  $\alpha = 0.82$ . El qubit entero tenía un área de unos  $10\mu m^2$ .

- i. Grafique el potencial. ¿Cuán grande es la barrera de energía entre los dos mínimos a lo largo de  $\phi_- = 0$ ? ¿Qué relación guarda con la profundidad total del pozo?
- ii. Estime la fase invariante de gauge a través de las junturas mayores, y relaciónela con la corriente que circula por el circuito.

**Ejercicio 6: Operador corriente en un qubit de flujo** Considere el circuito conocido como rf-SQUID.

$$H = \frac{1}{2C_J} q^2 + \frac{1}{2L} \phi^2 - E_J \cos\left(\frac{\Phi + \phi}{\varphi_0}\right). \quad (7)$$

En el experimento de Wal y colaboradores, las dos junturas más grandes tenían una corriente crítica  $I_J = 570nA$  y capacitancia  $C_J = 2.5fF$ , mientras que la juntura más pequeña, lo era por un factor  $\alpha = 0.82$ . El qubit entero tenía un área de unos  $10\mu m^2$ .

- i. Muestre que en el límite  $L_J/L \ll 1$  y operado en el punto de frustración  $\Phi = \Phi_0/2$ , la fase  $\varphi$  que minimiza el potencial puede escribirse como  $\pm(\pi - \varepsilon)$ , con  $\varepsilon$  una corrección pequeña  $\varepsilon \propto L_J/L$ . Con esto, resuelva aproximadamente la ecuación para los mínimos  $\phi_{L,R}$  del potencial.
- ii. Escriba el operador corriente para el rf-SQUID en términos del operador de flujo. Estime los elementos de matriz en la base  $\{|L\rangle, |R\rangle\}$  y muestre que el operador es aproximadamente diagonal en esta base.

Observación: Si se consideran los dos mínimos locales de forma independiente, cuando éstos sean suficientemente profundos pueden aproximarse, cada uno, con un potencial armónico. Combinado con el término capacitivo el potencial inductivo da origen a dos estados fundamentales efectivos de resonador LC, uno centrado en torno a cada mínimo del potencial de la ecuación (7). Las funciones de onda aproximadas para estos estados son entonces Gaussianas  $\psi_{L,R}(\varphi) = \langle \varphi | L, R \rangle \propto e^{-\frac{E_J}{16E_C}(\varphi - \varphi_{L,R})^2}$

- iii. Pasando a una base rotada  $1/\sqrt{2}(|L\rangle \pm |R\rangle)$ , muestre que el operador corriente tiene la forma aproximada  $\tilde{I}\sigma_x$ , encuentre la expresión para  $\tilde{I}$ .

### Interacción entre qubits

**Ejercicio 7: Aproximación de onda rotante** Considere el modelo de interacción entre dos qubits

$$H = \frac{\Delta_1}{2} \sigma_z^1 \otimes \mathbb{I}^2 + \frac{\Delta_2}{2} \mathbb{I}^1 \otimes \sigma_z^2 + J \sigma_x^1 \otimes \sigma_x^2, \quad (8)$$

en el límite resonante  $\Delta_1 = \Delta_2$ .

<sup>2</sup>Van Der Wal, C. H., Ter Haar, A. C. J., Wilhelm, F. K., Schouten, R. N., Harmans, C. J. P. M., Orlando, T. P., and Mooij, J. E. (2000). Quantum superposition of macroscopic persistent-current states. *Science*, 290(5492), 773-777.

- i. Use la descomposición de la matriz de Pauli  $\sigma_x$  en matrices  $\sigma_{\pm}$  y la representación de interacción para encontrar el Hamiltoniano  $H_{RWA}$  de este sistema en la aproximación de onda rotante.
- ii. Muestre que  $H_{RWA}$  puede descomponerse en bloques de  $2 \times 2$  que actúan sobre los subespacios par  $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  e impar  $\{|10\rangle, |01\rangle\}$ . Encuentre los autovalores y autovectores de  $H_{RWA}$ .
- iii. Muestre que  $H$  también puede descomponerse en bloques de  $2 \times 2$  que actúan sobre los subespacios par  $\{|00\rangle, |11\rangle\}$  e impar  $\{|10\rangle, |01\rangle\}$ . Encuentre los autovalores y autovectores de  $H$ .
- iv. Analice los autovectores y muestre que en el límite de acoplamiento débil  $|J|/|\Delta| \ll 1$   $H$  tiene aproximadamente los mismo autoestados que el Hamiltoniano  $H_{RWA}$  que resulta de despreciar los términos rotantes. Estime la corrección que surge por no despreciar estos términos y muestre que la probabilidad de excitación asociada es proporcional a  $|J/\Delta|^2$