

Circuitos acoplados

Ejercicio 1: Acoplamiento a un resonador LC Considere un circuito formado por un resonador LC acoplado al circuito para un qubit de carga o trasmón, cuyo esquema se presenta en la figura

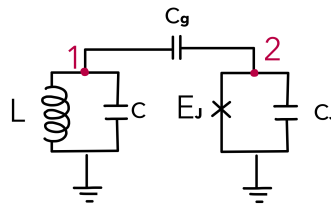


Figure 1: Acoplamiento a circuito LC

- Encuentre las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano y el Hamiltoniano para este sistema.
- Observe cómo se modifican las capacidades asociadas a cada término respecto de las que se encuentran en los Hamiltonianos libres. Tome el límite $C_g \ll C, C_\Sigma$, con $C_\Sigma = C + C_J$, sobre las constantes en cada término
- Muestre que en este límite, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = 4 E_c (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 - E_J \cos(\hat{\phi}/\varphi_0) + \hbar \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1)$$

con $\hat{n}_r = c_g/c \hat{q}_1/(2e)$ y \hat{q}_1 la variable de carga asociada al nodo 1.

Puede resultar de utilidad:

- Escribir primero el Hamiltoniano en términos de las variables de flujo y sus derivadas, haciendo el cambio a las variables de carga en un paso posterior.
- Escribir las relaciones entre capacidades usando $C_\Sigma = c_g + C_J$ como denominador. Por ejemplo:

$$\frac{c_g + C_J}{c c_g + c C_J + c_g C_J} = \left(c + \frac{c_g C_J}{c_g + C_J} \right)^{-1}$$

Ejercicio 2: Acoplamiento a una guía de ondas Considere un circuito formado por una línea de transmisión acoplada, en una dada posición x_k al circuito que representa un qubit de carga o trasmón, cuyo esquema se presenta en la figura. La línea de transmisión tiene densidades capacitiva $c(x) = c$ e inductiva $l(x) = l$ uniformes, de modo que $c_i = c \Delta x$ y $l_i = l \Delta x$.

- Encuentre las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano y el Hamiltoniano para este sistema.

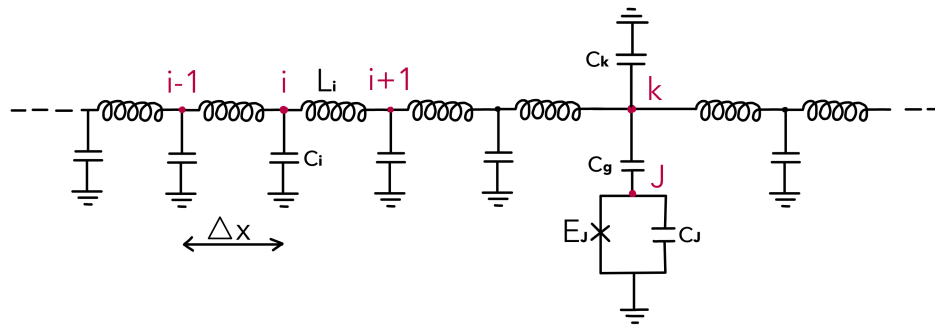


Figure 2: Acoplamiento a línea de transmisión

- ii. Observe cómo se modifican las capacidades asociadas a cada término respecto de las que se encuentran en los Hamiltonianos libres. Tome el límite $C_g \ll C, C_\Sigma$, con $C_\Sigma = C + C_J$, sobre las constantes en cada término
- iii. Muestre que en este límite, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = 4 E_c (\hat{n} + \hat{n}_r)^2 - E_J \cos(\hat{\phi}/\varphi_0) + \sum_m \hbar \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \quad (2)$$

con $\hat{n}_r = c_g/c \hat{q}_k/(2e)$ y \hat{q}_k la variable de carga asociada al nodo etiquetado con la letra k.

- iv. ¿En qué difiere este Hamiltoniano del Hamiltoniano encontrado en el ejercicio anterior?

Ejercicio 3: Hamiltonianos de interacción materia-radiación Para formarnos una imagen más clara de los modelos que podemos reproducir a partir de los circuitos estudiados en los Ejercicios 1 y 2, analizamos distintas formas que toman los Hamiltonianos (1) y (2) de acuerdo a la relación entre parámetros y la base de estados en la que se expandan sus operadores. Para eso:

- i. Expanda explícitamente el cuadrado en el primer término de los Hamiltoniano y escriba el operador \hat{n}_r en términos de los operadores de creación y destrucción de fotones \hat{a}_m^\pm
- ii. Considerando que el circuito localizado se ubica en el régimen transmónico, realice las aproximaciones correspondientes y escriba el Hamiltoniano completo en términos de operadores de creación y destrucción de excitaciones de cada subsistema.
- iii. Sobre el resultado del inciso anterior, realice la aproximación de dos niveles. ¿Qué modelo paradigmático de la electrodinámica cuántica recupera?
- iv. Repita los incisos (ii) y (iii) para el caso de acoplamiento a una guía de ondas. ¿Reconoce algún modelo paradigmático en las expresiones halladas?
- v. Discuta el caso en que el circuito localizado se encuentra en el régimen de qubit de carga.

Observación: _____

Desprecie el término $\propto \hat{n}_r^2$, que induce únicamente una traslación en los niveles de energía del resonador.

Ejercicio 4: Modelo de Spin Boson y límite Markoviano Considere el Hamiltoniano de Spin Boson

$$H_{SB} = \sum_m \hbar \omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar \frac{\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_m \hbar \hat{\sigma}_x (g_m^* \hat{a}_m^\dagger + g_m \hat{a}_m), \quad (3)$$

con $g_m = i2e c_g / c_\Sigma \sqrt{\hbar \omega_m / (2cd)}$ y d la longitud de la guía de ondas. En el límite $|g_m| \ll 1$ tal que puedan despreciarse los términos contra-rotantes, se considera el estado más general de una o cero excitaciones

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t) |g, 0\rangle + c_e(t) |e, 0\rangle + \sum_m c_m(t) |g, 1_m\rangle \quad (4)$$

- i. Encuentre las ecuaciones de movimiento para $c_e(t)$, $c_g(t)$ y $c_m(t)$
- ii. Muestre que

$$c_m(t) = e^{-i(\omega_m - \omega_a/2)(t-t_0)} c_m(t_0) - i g_m^* \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega_m - \omega_a/2)(t-t')} c_e(t') \quad (5)$$

es la solución (formal) para ecuación para las amplitudes $c_m(t)$ asociadas a los modos del oscilador. Usando ese resultado, escriba la ecuación para la amplitud del estado excitado del qubit como

$$\partial_t c_e(t) = -i \omega c_e(t) - i \xi(t, t_0) - \int_{t_0}^t dt' K(t-t') c_e(t') \quad (6)$$

- iii. Muestre que el caso $\xi(t, t_0) = 0$, $K(t-t') = 1/(2\pi) \int d\omega J(\omega) e^{-i\omega(t-t')}$ con $J(\omega) = 2\pi\alpha$ constante sobre toda la recta real $\omega \in \mathbb{R}$ conduce a una ecuación diferencial Markoviana que depende únicamente del valor $c_e(t)$ a tiempo t .
- iv. Escriba el operador densidad $\rho(t)$ del sistema compuesto.
- v. Trace sobre los grados de libertad de la línea de transmisión para obtener el operador densidad del qubit. ¿Cuáles son la tasa de decaimiento y el corrimiento de Lamb?

Observación: _____

El espacio de Hilbert es infinito-dimensional así que no podrá escribir una expresión matricial. Sugerencia, expanda $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$

Ejercicio 5: Interacciones mediadas por la cavidad Considere dos qubits que interactúan con la misma cavidad de forma que el Hamiltoniano del sistema total puede escribirse como $H = H_0 + V$ con

$$H_0 = \hbar \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i=1}^2 \hbar \frac{\omega_i}{2} \hat{\sigma}_z^i \quad ; \quad V = \sum_{i=1}^2 \hbar g_i (\hat{\sigma}_+^i \hat{a} + \hat{\sigma}_-^i \hat{a}^\dagger). \quad (7)$$

- i. Usando teoría de perturbaciones a segundo orden en el límite no-resonante en el que $|\delta_i| = |\omega_r - \omega_i| \gg |g_i|$ obtenga el modelo de acoplamiento dispersivo. Muestre que este Hamiltoniano es equivalente a

$$H_{ef} = \sum_i \left(\frac{\omega_i}{2} - \frac{2g_i^2}{\delta_i} \right) \hat{\sigma}_z^i - \frac{g_1 g_2}{2} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) \hat{\sigma}_x^1 \hat{\sigma}_x^2 \quad (8)$$

en el subespacio sin fotones.

- ii. Resuelva la dinámica generada por el Hamiltoniano efectivo H_{ef} . ¿ En qué límite esta operación se convierte en una *compuerta iSWAP*?

Observaciones y sugerencias:

- Antes de aplicar la teoría de perturbaciones, pase a una representación de interacción en la que se *esconda* la evolución de escala ω_r . Debería obtener un Hamiltoniano con términos $\propto \delta_i$ o $\propto g_i$. La relación $|\delta_i| \gg |g_i|$ permite aplicar teoría de perturbaciones sobre este Hamiltoniano.
- En lugar de aplicar teoría de perturbaciones sobre los estados y niveles de energía, conviene utilizar una Transformación de Schrieffer-Wolff, que a segundo orden está dada, para un Hamiltoniano $H = H_0 + H_1$ por

$$H_{ef} = H_0 + \frac{1}{2} [S_0, H_1] \quad \text{con} \quad S_0 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | H_1 | m \rangle}{E_n - E_m} |n\rangle \langle m|$$

- Puede ser útil escribir el Hamiltoniano efectivo en representación matricial. De esta forma se observa que H_{ef} es fácilmente diagonalizable, lo que permite hallar el operador de evolución generado por H_{ef} de manera relativamente directa recurriendo a la base de autoestados.