Circuitos acoplados

Ejercicio 1: Entropía de entrelazamiento La entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida

$$S = -\operatorname{tr}(\rho_{qb}\log(\rho_{qb})) = -\sum \lambda_i \log(\lambda_i), \tag{1}$$

con λ_i los autoestados de la matriz densidad reducida, es un indicador del entrelazamiento entre dos sub-sistemas. Retomando el ejercicio 4 de la guía 5 donde se encontró el operador densidad reducido del qubit en interacción con una línea de transmisión, estudiaremos el entrelazamiento entre el qubit y el entorno fotónico.

Considere un átomo originalmente excitado $c_e(t_0) = 1$ en interacción con una línea de transmisión originalmente en estado de vacío $c_m(t_0) = 0 \forall m$.

i. Calcule los autoestados $\lambda_\pm$ de la matriz desidad del qubit.
ii. Muestre que el entrelazamiento es nulo a $t = 0$ y a $t = +\infty$, y encuentre cuándo es máximo.

Ejercicio 2: Qubit en un entorno a temperatura nula En este ejercicio derivaremos la ecuación de movimiento (ecuación de Lindblad) para un ejemplo concreto: el de un qubit interactuando con un entorno de campo bosónico a temperatura nula. El Hamiltoniano que describe el conjunto 'sistema + entorno' completo está dado por

$$H = H_q + H_e + H_{int} = \frac{\omega_q}{2}\,\sigma_z + \sum_m \omega_m\, a_m^\dagger a_m + \sum_m \sigma_x\,(g_m^* a_m^\dagger + g_m a_m), \tag{2}$$

donde se distingue un término de evolución *libre* del qubit, un término de evolución libre para el entorno y un término de interacción qubit-entorno respectivamente.

(i) Dinámica del conjunto completo

a. ¿Qué nombre recibe este modelo? ¿Qué arquitectura de circuitos superconductores se describe mediante este Hamiltoniano y bajo qué condiciones para los parámetros involucrados?
b. Muestre que el Hamiltoniano de interacción toma, en representación de interacción, la forma

$$H_{int,I} = \sum_m \left(e^{i\omega_q t}\,\sigma_+ + e^{-i\omega_q t}\,\sigma_-\right)\left(g_m^* e^{i\omega_m t}\, a_m^\dagger + g_m e^{-i\omega_q t}\, a_m\right) \tag{3}$$

c. Escriba la ecuación que satisface el operador densidad del conjunto completo en representación de interacción.

(ii) A continuación, trazamos sobre los grados de libertad del entorno e incorporamos las aproximaciones de Born y Markov. Consideramos un estado inicial producto $\rho_{s+e} = \rho_s(0) \otimes \rho_e$

a. Integrando la ecuación de evolución para la matriz densidad $\rho_{s+e}(t)$ en representación de interacción (el enunciado evita escribir explícitamente el subíndice "I" en el operador densidad para aligerar la notación), muestre que

$$\dot{\rho}_{s+e}(t) = -i\left[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)\right] - \int_0^t dt' \left[H_{int,I}(t), \left[H_{int,I}(t'), \rho_{s+e}(t')\right]\right] \tag{4}$$

b. Tome la traza parcial bajo la suposición de que $\mathrm{Tr}_e[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)] = 0$ y de que la aproximación de Born es válida. Esta aproximación supone que, como el acoplamiento entre el entorno y el sistema es débil, el entorno se verá despreciablemente afectado por el sistema y en consecuencia $\rho_{s+e}(t) \sim \rho_s(t) \otimes \rho_e$. El resultado obtenido debe ser

$$\dot{\rho}_s(t) = -\int_0^t dt' \ \mathrm{Tr}\left[H_{int,I}(t), \left[H_{int,I}(t'), \rho_s(t') \otimes \rho_e\right]\right] \tag{5}$$

Expanda el doble conmutador y escriba $H_{int,I}(t) = H^{(s)}_{int,I}(t) \otimes H^{(e)}_{int,I}(t)$ para obtener una expresión donde la información del entorno se condensa en las funciones de correlación $\mathrm{Tr}_e(\rho_e H^{(e)}_{int,I}(t_i) H^{(e)}_{int,I}(t_j))$ con $t_{i,j} = t, t'$.

c. Ahora realizamos la aproximación de Markov y reemplazamos $\rho_s(t')$ por $\rho_s(t)$. Adicionalmente, hacemos el cambio de variables $t' \to t - t'$. Introducimos dos escalas temporales T_R es la escala temporal en la que el qubit cambia producto de su interacción con el entorno y T_e es la escala temporal en la que las funciones de correlación del entorno decaen. Suponiendo que $T_R \gg T_e$ el límite superior de la integral puede tomarse infinito.

(iii) Vamos a introducir la información sobre el modelo específico que queremos estudiar. Utilizando que un estado térmico puede escribirse como

$$\rho_e(T) = \frac{e^{-H_e/(k_B T)}}{\mathrm{Tr}\, e^{-H_e/(k_B T)}}, \tag{6}$$

con T la temperatura y k_B la constante de Boltzman.

a. Encuentre el estado del entorno, que bajo las aproximaciones realizadas será el mismo a todo tiempo, y corrobore que la suposición $\mathrm{Tr}_e[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)] = 0$ fue correcta.

b. Usando la expresión explícita para $H^{(s)}_{int,I}(t)$ muestre que la ecuación de evolución se reduce a

$$\dot{\rho}_s(t) = -\{(\sigma_+\sigma_-\rho_s - \sigma_-\rho_s\sigma_+)\Gamma(\omega_q) + (\sigma_-\sigma_+\rho_s - \sigma_+\rho_s\sigma_-)\Gamma(-\omega_q) + \text{h.c.}\} \tag{7}$$

con

$$\Gamma(\omega_q) = \int_0^\infty dt' \, e^{i\,\omega_q, t'} \, \mathrm{Tr}_e(\rho_e H^{(e)}_{int,I}(t) H^{(e)}_{int,I}(t - t')). \tag{8}$$

Usando el estado del entorno y la forma específica de $H^{(e)}_{int,I}(t)$, desarrolle la expresión para $\Gamma(\omega_q)$

c. Separando $\Gamma(\omega_q)$ en parte real e imaginaria según

$$\Gamma(\omega_q) = \frac{1}{2}\gamma(\omega_a) + i\, S(\omega_q), \tag{9}$$

puede verse que $\gamma(-\omega_q) = 0$. Llamando además $\gamma(-\omega_q) = \kappa$ encuentre la forma

$$\dot{\rho}_s(t) = -i\frac{S(\omega_q) - S(-\omega_q)}{2}\,[\sigma_z, \rho_s] + \frac{\kappa}{2}\big(2\sigma_-\rho_s\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \rho_s\}\big) \tag{10}$$

d. Escriba la ecuación de evolución para el estado del sistema en representación de Schrodinger

Ejercicio 3: Resonador con pérdidas Se considera un resonador con un forzado clásico, cuya evolución en condiciones de perfecto aislamiento está generada por el Hamiltoniano

$$H_\Omega = \omega a^\dagger\, a + (\Omega_o^*\, e^{-i\omega_d\, t}\, a + \Omega_o\, e^{i\omega_d\, t}\, a^\dagger). \tag{11}$$

El resonador se halla acoplado a una línea de transmisión que funciona como un entorno bosónico, de forma que el estado del resonador satisface, en representación de interacción, la ecuación

$$\dot{\rho}(t) = -i[(\omega_d - \omega)a^\dagger\, a + \Omega_o^*\, a + \Omega_o\, a^\dagger, \rho_s(t)] + \frac{\kappa}{2}\big(2a\,\rho_s\, a^\dagger - \{a^\dagger\, a, \rho_s\}\big) \tag{12}$$

i. Escriba y resuelva la ecuación de evolución para el valor medio $\langle a\rangle = \mathrm{tr}(\rho_s\, a)$ y para el número de fotones en el resonador $\left\langle a^\dagger\, a\right\rangle$

ii. Observemos el *ancho a altura media*. Tome el límite $\lim_{t\to\infty}\left\langle a^\dagger\, a\right\rangle$ para conocer el número de fotones del estado asintótico. ¿Para qué frecuencia del resonador ω es máximo y cuál es este número máximo de fotones?. El ancho a altura media es la distancia entre los dos valores de frecuencia para los cuales $\left\langle a^\dagger\, a\right\rangle_{t\to\infty}$ cayó al 50% de su valor máximo. Encuentre el ancho a altura media.

Ejercicio 4: Qubit en un entorno a temperatura finita Resolvemos la dinámica de un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico como en el ejercicio 2, pero esta vez el entorno se halla en un estado térmico con temperatura $T \geq 0$. La ecuación maestra que describe la evolución del qubit es en este caso es (en unidades de $\hbar = 1$)

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma-, \rho\}) + n_\omega\frac{\gamma}{2}(2\sigma_+\rho\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \rho\}), \tag{13}$$

con $H = \omega/2\,\sigma_z$ el Hamiltoniano libre del qubit y $n_\omega = (e^{\omega/(k_B\, T)} - 1)^{-1}$ el número de ocupación bosónico.

i. Muestre que un observable que actúa sobre el qubit evoluciona según

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = -\, i\,\langle [O, H]\rangle + \\ +\ (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_+\,[O, \sigma_-] + [\sigma_+, O]\,\sigma_-\rangle + n_\omega\,\frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_-\,[O, \sigma_+] + [\sigma_-, O]\,\sigma_+\rangle\,. \tag{14}$$

ii. Derive las *ecuaciones de Bloch* para $\langle\sigma_z\rangle$ y $\langle\sigma_\pm\rangle$. Resuelva para el caso de temperatura nula.

iii. Usando los valores obtenidos en el inciso (ii), reconstruya el *vector de Bloch*. Calcule su norma y muestre que la misma se contrae hacia el interior de la esfera.

iv. Usando el vector de Bloch $\mathbf{s}(t)$ pruebe que la matriz densidad evoluciona según

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} P_1 + e^{-t/T_1}(P_1 - \rho_{11}(0)) & \rho_{10}\, e^{-i\omega\, t - t/(2\,T_1)} \\ \rho_{01}\, e^{i\omega\, t - t/(2\,T_1)} & 1 - P_1 - e^{-t/T_1}(P_1 - \rho_{11}(0)) \end{pmatrix} \tag{15}$$

con $P_1 = n_\omega/(1+2n_\omega) = \lim_{n\to\infty}\rho_{11}(t)$ es la probabilidad de excitación asintótica y $T_1 = (1-2\,P_1)/\gamma$ da la escala en la que $\rho(t)$ converge a la solución asintótica. Relacione esta solución con el límite de temperatura nula.

Puede resultar útil

Recordar que el vector de Bloch es un vector de norma unidad que satisface

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\,\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{16}$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$