Estructura de Materia 1
Primer Cuatrimestre de 2020

Práctica 5
Inestabilidades Hidrodinámicas

Problema 1.

Considere el flujo general de un fluido incompresible plano de viscosidad cinemática ν, en ausencia de fuerzas externas; tal que el campo de velocidades resulta $\boldsymbol{u} \perp \hat{\mathbf{z}} \, \forall (x, y, t)$. Mostrar que si se considera la componente $\hat{\mathbf{z}}$ del rotor de la ecuación de Navier-Stokes, se llega a la siguiente ecuación para la evolución temporal de la vorticidad:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\psi, \omega] + \nu \nabla^2 \omega,$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega \, \hat{\mathbf{z}} = -\nabla^2 \psi \, \hat{\mathbf{z}}$, y

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x},$$

denota el corchete de Poisson clásico.

Problema 2. Inestabilidad ideal de flujos paralelos

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0, y con un campo de velocidades bidimensional (de equilibrio) dado por $\mathbf{u} = U(y) \, \hat{\mathbf{x}}$.

(i) Derivación de la ecuación de Rayleigh.

a) Considere un campo de velocidades ligeramente perturbado mediante una perturbación lineal de la forma

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \delta\psi(x, y, t).$$

Muestre que la evolución temporal de la perturbación introducida a la vorticidad ($\delta\omega$), puede escribirse, a primer orden, como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta\omega) = [\delta\psi, \omega_0] + [\psi_0, \delta\omega].$$

b) Proponga ahora perturbaciones de la forma

$$\delta\psi(x, y, t) = \Phi(y) \, \exp\{i \, [kx - 2\pi f(k) \, t]\}$$

y verifique que el coeficiente de la perturbación, $\Phi(y)$, satisface

$$\Phi''(y) + \left(\frac{k \, U''(y)}{2\pi f(k) - k \, U(y)} - k^2 \right) \Phi(y) = 0,$$

Esta última expresión se denomina ecuación de Rayleigh.

Problema 3.

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0, y con un campo de velocidades bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

Problema 4.

Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1 \\ y & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

Problema 5.

Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si } y > 1 \\ 1 - y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$