Estructura de la Materia 1 – Práctica 2

La práctica 2 trata sobre las diferentes ecuaciones de Bernoulli que, bajo ciertas condiciones específicas, permiten obtener primeras integrales de las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal. El otro tema que aborda la práctica (problema 5 en adelante) es el teorema de conservación de la cantidad de movimiento.
Repasemos un poco cómo se obtienen las ecuaciones de Bernoulli a partir de la ecuación de Euler, dada por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F} \quad ,$$

donde $\vec{F}$ tiene unidades de fuerza por unidad de masa. A partir de las identidades diferenciales vectoriales demostradas en la guía 0 tenemos $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \vec{\nabla}(v^2/2)$. Si proyectamos sobre el diferencial de línea $d\vec{\ell}$ correspondiente a una línea de corriente, considerando que $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} \perp \vec{v}$, obtenemos

$$d\vec{\ell}.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}dp + d\vec{\ell}.\vec{F} \tag{1}$$

donde hemos usado que $d\vec{\ell}.\vec{\nabla}g = dg$, es decir, es el diferencial de g sobre la línea de corriente. Si el fluido es barotrópico, es decir que la densidad depende únicamente de la presión, entonces el término de la presión podrá escribirse como

$$-\frac{1}{\rho}dp = -d\mathcal{P}, \quad \text{donde} \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho(p')} \quad .$$

Si la densidad es uniforme tendremos simplemente $\mathcal{P} = p/\rho$. A partir de la ecuación (1) y asumiendo diferentes hipótesis sobre el fluido se obtienen diferentes leyes de Bernoulli, nosostros sólo consideraremos dos casos. Primer caso, fluido barotrópico, estacionario y bajo la acción de fuerzas conservativas ($\vec{F} = -\vec{\nabla}\psi$)

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \psi = \text{cte} \quad \text{(sobre cada línea de corriente)} \quad .$$

El segundo caso es el de flujo barotrópico e irrotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \implies \vec{v} = \vec{\nabla}\phi$) bajo acción de fuerzas conservativas, en este caso no será necesario proyectar sobre las líneas de corriente para anular el término $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$ en la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \psi = g(t) \quad \text{(en todo el fluido)} \quad ,$$

donde en este caso, como el problema es no estacionario, podemos asegurar que la suma de los cuatro términos es espacialmente constante, pero debemos dejar abierta la posibilidad de que haya una dependencia temporal.

Problema 1

En este problema tenemos un líquido incompresible fluyendo por un tubo en una situación estacionaria, y debido a que aproximadamente las velocidades son uniformes sobre la sección del conducto el problema puede tratarse como si tuviéramos un campo de velocidades unidimensional.

i) Ya que tenemos un flujo estacionario, usaremos la ley de Bernoulli para flujos estacionarios

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{cte} \quad ,$$

por lo que tomando los puntos 1 y 2 del esquema de la guía podemos establecer la igualdad

$$\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho_0} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 \quad .$$

Observemos que en esta expresión las presiones y las alturas son datos, mientras que las velocidades no lo son. Claramente necesitaremos otra ecuación para poder resolver el problema, y lo que no hemos utilizado hasta ahora es la ecuación de continuidad. En este caso, tomando el volumen de control delimitado por las superficies A_1 y A_2, podemos afirmar que el flujo neto a través de su superficie es nulo (lo que entra es igual a lo que a sale), es decir que los flujos volumétricos son iguales en ambas "tapas" del volumen de control

$$Q_1 = Q_2 \Longrightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

por lo que reemplazando v_2 en función de v_1 en Bernoulli obtenemos

$$v_1^2\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho_0} + 2g(h_2 - h_1) \quad .$$

Multiplicando esta última igualdad por A_1^2 obtenemos una expresión para $Q_1^2 = Q_2^2 \equiv Q^2$

$$Q^2 = \frac{2A_1^2 A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}\left[\frac{(p_1 - p_2)}{\rho_0} + g(h_1 - h_2)\right] \Longrightarrow Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2}{A_1^2 - A_2^2}\left[\frac{(p_1 - p_2)}{\rho_0} + g(h_1 - h_2)\right]} \quad .$$

ii) De acuerdo al resultado obtenido podemos plantearnos cuándo este va a tener sentido, para ello debemos pedir que el argumento de la raíz sea positvo. Para ello podríamos en principo plantear dos casos, si $A_1 > A_2$ o si $A_1 < A_2$, aunque por hipótesis estamos en el primer caso. Entonces la condición para que exista flujo será

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\rho_0} + g(h_1 - h_2) > 0 \Longrightarrow p_1 > p_2 + \rho_0 g(h_2 - h_1) \quad .$$

iii) Puede haber flujo de 1 a 2 aunque $h_2 > h_1$, siempre que la presión en 1 exceda a la presión en 2 como se obtuvo en el ítem anterior.

iv) Si $A_1 = A_2$, la conservación del caudal implicará $v_1 = v_2$ y Bernoulli se reducirá a

$$\frac{p_1}{\rho_0} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho_0} + gh_2 \quad ,$$

siendo ésta la condición para que el flujo exista.

Problema 3

Este es un problema no estacionario, vamos a analizar lo que ocurre cuando tenemos un embudo lleno de un líquido al que en un instante dado se lo deja fluir retirando una tapa que obturaba su abertura inferior.
i) En primer lugar nos dicen que despreciemos las componentes horizontales de la velocidad, por lo que el campo de velocidades más general que podemos tomar es $\vec{v} = v(\vec{r}, t)\hat{z}$. Tomaremos una hipótesis adicional, consideraremos que el flujo es irrotacional, la cual para un fluido ideal es acertada, ya que como se explicó en la clase teórica, un fluido ideal no puede desarrollar vorticidad

$$\vec{\nabla} \times v\hat{z} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad .$$

Entonces el campo de velocidades tiene la forma $\vec{v} = v(z, t)\hat{z}$. Además, por conservación del caudal volumétrico (fluido incompresible) tenemos

$$v(z, t)A(z) = f(t) \Longrightarrow v(z, t) = \frac{u(t)}{1 + \epsilon z/h} \quad ,$$

por lo que ya hemos determinado la dependencia espacial de la velocidad, sólo nos falta encontrar su dependencia temporal. Para ello usaremos Bernoulli dependiente del tiempo aplicado a las aberturas del embudo (1 es la abertura superior y 2 la inferior)

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2(1+\epsilon)^2} + gh = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \quad ,$$

donde los términos de presión se anulan debido a que $p_1 = p_0 = p_2$, siendo p_0 la presión atmosférica. El potencial del campo de velocidades $\phi(z, t)$ satisface

$$\phi(z, t) = \frac{h}{\epsilon} \ln(1 + \epsilon z/h) u(t) \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v(z, t) = \frac{u(t)}{1 + \epsilon z/h} \quad .$$

Evaluando para $z = h$ y $z = 0$ llegamos a

$$\frac{h}{\epsilon} \ln(1+\epsilon) \frac{du}{dt} + \frac{u^2}{2(1+\epsilon)^2} + gh = \frac{u^2}{2} \quad ,$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden que podemos integrar, pero antes aproximamos $\ln(1+\epsilon) \simeq \epsilon$ y $(1+\epsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\epsilon$

$$\int_0^u \frac{du'}{\frac{\epsilon}{gh}u'^2 - 1} = \int_0^t g\, dt' \quad .$$

Recordando que $\int (s^2-1)^{-1} ds = -\text{arctanh}(s)$, la integral de arriba se integra rápidamente y además podemos invertir la igualdad para hallar $u(t)$

$$u(t) = -\sqrt{\frac{gh}{\epsilon}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\epsilon g}{h}} t\right) \quad ,$$

que es la velocidad de salida en la tapa inferior.
ii) Para analizar si se llega a un estacionario veamos si al tomar valores muy grandes del tiempo t se tiende a un valor constante de la velocidad. Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = -\sqrt{\frac{gh}{\epsilon}} \quad ,$$

que es el valor correspondiente al régimen estacionario.

Problema 6

Para resolver este problema vamos a necesitar una ecuación que exprese la conservación de la cantidad de movimiento de un fluido dentro de un volumen de control V. Partimos de la ecuación indefinida y luego usamos la ecuación de continuidad

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} \quad ,$$

Si queremos llegar a una ley de conservación de la cantidad de movimiento nos va a interesar tener un término $\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}$ que expresa la razón de cambio del impulso por unidad de volumen. Entonces en la ecuación anterior reemplazamos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} - \vec{v}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) \quad ,$$

donde en la última igualdad usamos la ecuación de continuidad ($\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.(\rho\vec{v})$). Ahora podemos escribir en componentes la ecuación para la evolución de $\rho\vec{v}$

$$\partial_t(\rho v_i) = \underbrace{-v_i\partial_j(\rho v_j) - \rho v_j \partial_j v_i}_{-\partial_j(\rho v_i v_j)} + \partial_j \sigma_{ij} + f_i \quad ,$$

y definiendo el tensor $\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}$ tenemos en definitiva

$$\partial_t(\rho v_i) = -\partial_j \Pi_{ij} + f_i \quad .$$

Integremos en un volumen fijo V para ver más claramente cuál es el significado físico del tensor Π_{ij}, en componentes

$$\partial_t \int_V \rho v_i dV = \int_V f_i dV - \int_V \partial_j \Pi_{ij} dV \quad ,$$

o en forma vectorial y haciendo uso del teorema de la divergencia

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{f} dV - \int_{\partial V} \overline{\overline{\Pi}}.d\vec{S} \quad .$$

Lo que tenemos entonces es que la cantidad de movimiento en el volumen V (miembro izquierdo) puede variar por las fuerzas de volumen que actúan sobre V (primer término del miembro derecho) o por el flujo de cantidad de movimiento a través de la superficie de V (segundo término del miembro derecho). Por lo que $\overline{\overline{\Pi}}$ es el tensor de transporte de la cantidad de movimiento, o dicho de otra manera, $\Pi_{ij} n_j$ es la componente $i-$ésima del momento que fluye a través de un área unitaria.

Lo obtenido hasta aquí corresponde a un fluido cualquiera, si consideramos ahora un fluido ideal

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \Longrightarrow \Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{f} dV - \int_{\partial V} \left[p\hat{n} + \rho \vec{v}(\vec{v}.\hat{n}) \right] dS \quad .$$

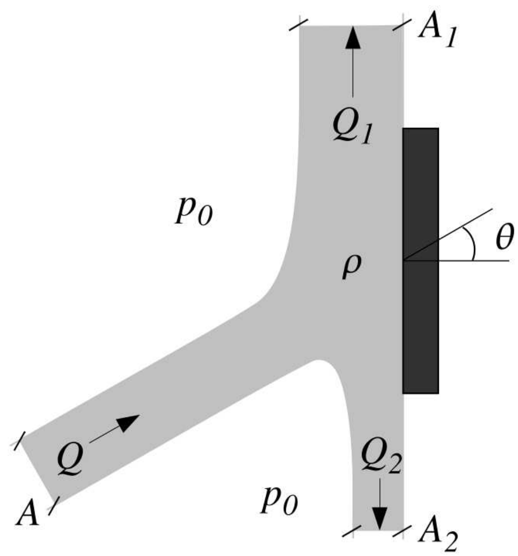
En el caso de tener fuerzas conservativas, $\vec{f} = -\vec{\nabla}\psi$ y el término derecho puede escribirse como una integral de superficie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV = - \int_{\partial V} \left[p\hat{n} + \rho \vec{v}(\vec{v}.\hat{n}) + \psi \hat{n} \right] dS \quad .$$

El hecho de que todos los términos puedan ser escritos como integrales sobre la superficie S nos dice que para la evolución de la cantidad de movimiento, los movimientos de los elementos de fluido dentro del volumen V son irrelevantes para el problema en cuestión.

Pasando al ejercicio, tomamos como volumen de control el volumen delimitado por las "tapas" A, A_1 y A_2.

i) En el ejercicio se pide calcular la fuerza a aplicar sobre la placa para evitar que la fuerza ejercida por el



jet produzca un desplazamiento. La situación es estacionaria y nos dicen que no hay fuerzas de volumen; por lo tanto el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento tiene la forma

$$\int_{\partial V} (p\hat{n} + \rho\vec{v}\ \vec{v}.\hat{n})\ dS = 0 \quad .$$

Notemos que integrar $p\hat{n}$ o $(p - p_0)\hat{n}$ sobre la superficie cerrada es equivalente (por qué?), pero la segunda expresión es más útil cuando se consideran configuraciones en que parte del fluido se encuentra en contacto con una atmósfera con presión constante p_0, porque sobre la interfase aire-líquido el término de presiones de la integral se anulará. Los términos de velocidad sólo contribuyen en las "tapas", ya que en toda otra zona de la superficie cerrada se tiene $\vec{v} \perp \hat{n}$. Otra cuestión importante a considerar es que si se toma un volumen de control lo suficientemente grande, tal que las "tapas" se encuentren alejadas de la zona de influencia de la placa, entonces podremos afirmar que la presión en las "tapas" será p_0 (se entiende que, incluso, en el interior del chorro). Dicho todo esto, el término de presión da un único aporte, sobre la superficie de la placa, donde $p \neq p_0$

$$\int_S (p - p_0)\hat{n}\ dS + \int_A \rho\vec{v}\ \vec{v}.\hat{n}\ dS + \int_{A_1} \rho\vec{v}\ \vec{v}.\hat{n}\ dS + \int_{A_2} \rho\vec{v}\ \vec{v}.\hat{n}\ dS = 0 \quad .$$

Por Bernoulli estacionario $p/\rho + v^2/2$ =cte sobre cada línea de corriente. Considerando líneas de corriente que vayan de A a A_1 y de A a A_2 podemos inferir que $v_1 = v_2 = v = Q/A$. Podemos evaluar entonces la componente $\hat{x}$ de las integrales

$$\underbrace{\int_S (p - p_0)\hat{x}\, dS}_{\vec{F}} + \int_A \rho v \cos\theta \hat{x} \underbrace{\vec{v}.\hat{n}}_{-v}\ dS = 0 \quad ,$$

donde hemos tenido en cuenta que la integral de presiones tiene una contribución correspondiente a la fuerza ejercida por el fluido hacia la derecha ($\int_S p\hat{x} dS$) y otra contribución de fuerza hacia la izquierda debida a la presión atmosférica ($-\int_S p_0\hat{x} dS$). El desbalance entre estas dos contribuciones será exactamente la fuerza que deberá ejercerse sobre la placa para que no deslice. En definitiva, usando que $v = Q/A$ tendremos

$$\vec{F} = -\frac{\rho Q^2}{A}\cos\theta\ \hat{x} \quad .$$

ii) Para calcular el caudal en las "tapas" A_1 y A_2, consideremos la componente $\hat{y}$, obteniéndose

$$-\rho A v^2 \sin\theta + \rho A_1 v^2 - \rho A_2 v^2 = 0 \quad .$$

Teniendo en cuenta además que la conservación del caudal implica que $A_1 + A_2 = A$, entonces

$$Q_1 = \frac{1}{2}(1 + \sin\theta) \quad , \quad Q_2 = \frac{1}{2}(1 - \sin\theta) \quad .$$