Estructura de la Materia 1 – Primera Entrega

Problema 7

En este problema tenemos un fluido con velocidad angular constante, una rotación rígida $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Entonces tendremos para la vorticidad

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad .$$

Desarrollando en componentes

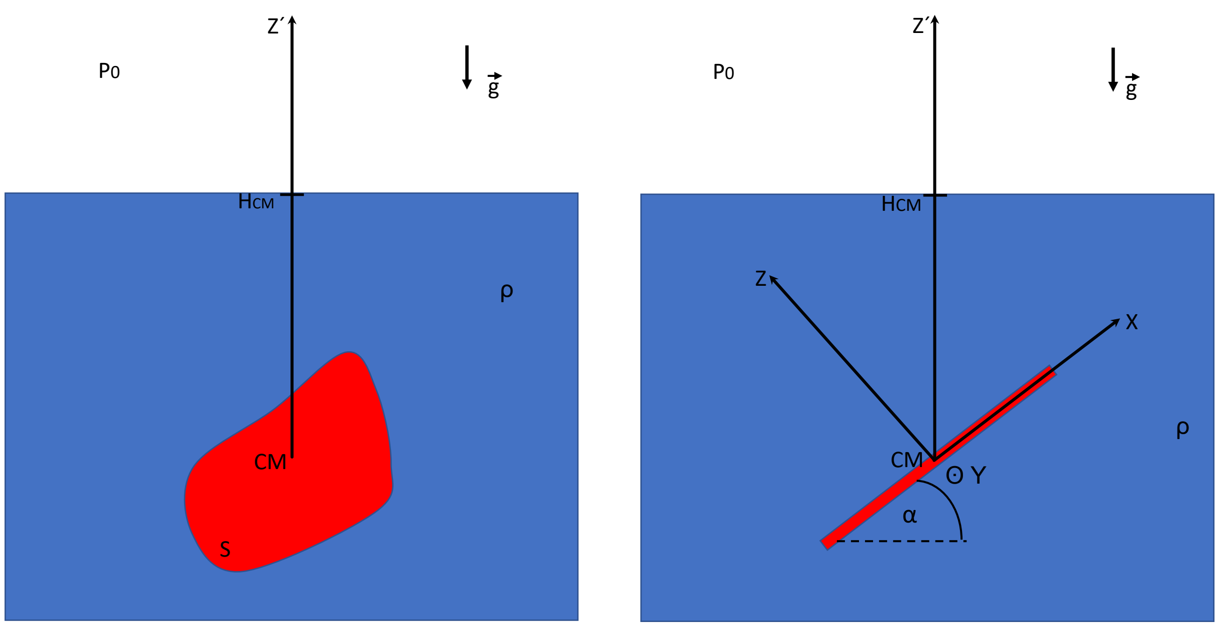
$$\omega_i = [\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{klm}\Omega_l r_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j(\Omega_l r_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j(\Omega_l r_m) \quad .$$

Recordando que $\vec{\Omega}$ es constante

$$\omega_i = \Omega_i \underbrace{\partial_j r_j}_{3} - \Omega_j \underbrace{\partial_j r_i}_{\delta_{ij}} = 2\Omega_i \Longrightarrow \vec{\omega} = 2\vec{\Omega} \quad .$$

Problema 13

Suponemos que la placa tiene una forma cualquiera y que su centro de masa se encuentra sumergido una profundidad H_{CM}. El eje z' está en la dirección de la vertical, y el sistema coordenado $x - y - z$ se dispone como se muestra en la figura, siendo z normal a la placa y el eje x coplanar con z y z', por lo que el eje y es normal a este plano. Elegimos el centro de masa como origen. Para calcular la



fuerza que el fluido ejerce sobre una de las caras de la placa (elegimos la cara superior) necesitamos encontrar la distribución de presiones sobre la placa. Planteamos la ecuación básica de la hidrostática

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{f} = -\rho g \hat{z}' \Longrightarrow p(z') = \text{cte} - \rho g z \quad .$$

Encontramos la constante de integración de la condición de contorno $p(z' = H_{CM}) = p_0$

$$p(z') = p_0 + \rho g (H_{CM} - z') \quad ,$$

y usando que para cualquier punto sobre la placa $z' = x \sin\alpha$

$$p(x) = p_0 + \rho g (H_{CM} - x \sin\alpha) \quad .$$

Nos queda integrar esta expresión sobre la placa para hallar la fuerza ejercida sobre la cara superior

$$\vec{F} = -\int_S p(x)\, \hat{n}\, dS = -\int_S [p_0 + \rho g(H_{CM} - x\sin\alpha)]\, \hat{z}\, dxdy = -(p_0 + \rho g H_{CM})\, S\hat{z} - p_0 \sin\alpha\, \hat{z} \underbrace{\int_S x dxdy}_{x_{CM}/\sigma \equiv 0} \quad .$$

Notemos que la segunda integral es proporcional a x_{CM} sólo porque supusimos que la densidad superficial de masa σ era uniforme. En definitiva, la fuerza que ejerce el fluido sobre la cara superior de la placa es

$$\vec{F} = -(p_0 + \rho g H_{CM})\, S\hat{z} \quad .$$

Para hallar el punto de aplicación de la fuerza planteamos que el torque que el fluido ejerce sobre la placa debe ser igual a $\vec{r}_A \times \vec{F}$, donde $\vec{r}_A$ es el punto de aplicación de la fuerza. Para calcular el torque calclamos las contribuciones diferenciales al torque sobre cada elemento diferencial de superficie sobre la placa, $d\vec{\tau} = p(x)\hat{z} \times \vec{r}\, dS$

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = \int_S [p(x)\hat{z} \times \vec{r}] dS \quad .$$

Como estamos sobre la placa, $\vec{r} = (x, y, 0)$

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = \int_S [p_0 + \rho g(H_{CM} - x\sin\alpha)]\, \hat{z} \times (x\hat{x} + y\hat{y})\, dS \quad ,$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = (p_0 + \rho g H_{CM}) \underbrace{\int_S (x\hat{y} - y\hat{x}) dS}_{(x_{CM}\hat{y} - y_{CM}\hat{x})/\sigma = 0} - \rho g \sin\alpha \underbrace{\int_S (x^2\hat{y} - xy\hat{x}) dS}_{(I_{yy}\hat{y} - I_{xy}\hat{x})/\sigma} \quad .$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad llegamos a la relación

$$(x_A\hat{y} - y_A\hat{x})(p_0 + \rho g H_{CM}) S = \frac{\rho g \sin\alpha}{\sigma} (I_{xy}\hat{x} - I_{yy}\hat{y}) \quad ,$$

por lo que las componentes del punto de aplicación serán

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_A & = & \frac{-\rho g \sin\alpha\, I_{yy}}{\sigma S(p_0+\rho g H_{CM})} \\ \\ y_A & = & \frac{\rho g \sin\alpha\, I_{xy}}{\sigma S(p_0+\rho g H_{CM})} \end{array} \right. .$$

Ejercicio 14

(I) En el primer inciso nos piden que calculemos la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en $z = 0$ el valor de la densidad es $\rho = \rho_0$. También nos dicen que el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F} = -g\hat{z}$. Para ello contamos con la ecuación de Euler que nos permite resolver el campo de velocidades euleriano de un fluido no viscoso,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} + \mathbf{f}. \tag{1}$$

Sabiendo que el agua se encuentra en reposo y que la fuerza por unidad de masa y de volumen es $\mathbf{F} = -g\hat{z}$ podemos reescribir la ec.(1) como,

$$0 = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} - g\hat{z}, \tag{2}$$

ya que la expresión para la presión es $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$ la ec.(2) nos queda,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dz}\left[\frac{K(\rho-\rho_0)}{\rho_0}\right] = \frac{K}{\rho_0}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = -g,$$

que al ser de variables separables podemos integrar. Integrando esta ecuación entre los limites indicados llegamos a la siguiente expresión,

$$\frac{d\rho}{\rho} = -g\frac{\rho_0}{K}dz \Rightarrow ln(\rho) - ln(\rho_0) = -zg\frac{\rho_0}{K},$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-zg\frac{\rho_0}{K}}. \tag{3}$$

La ec.(3) es la expresión para la densidad del agua. Para obtener la presión solo tenemos que remplazar la densidad obtenida en $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$. Por lo tanto, la distribución de presión en función de la profundidad es,

$$p(z) = K\left(e^{-zg\frac{\rho_0}{K}} - 1\right). \tag{4}$$

Notar que sobre la superficie del agua ($z = 0$) la presión es 0, para que la expresión de la presión sea mas general podríamos sumarle un p_0 a la ec.(4), que representaría la presión externa.

(II) Ahora nos piden calcular el error que se comete al calcular la densidad y la presión del agua suponiendo esta incompresible. Nos dicen que la profundidad es de $1000m$, $K = 2\times10^9 N/m^2$ y $\rho_0 = 1000Kg/m^3$, también nos dicen que podemos despreciar la presión externa. Utilizando el limite dado ($K \to \infty$) la presión en el caso incompresible es,

$$p(z) = K\left(e^{-zg\frac{\rho_0}{K}} - 1\right) = \frac{\left(e^{-zg\frac{\rho_0}{K}} - 1\right)}{1/k} \xrightarrow{L'H} \frac{\left(\frac{zg\rho}{K^2}\right)e^{-zg\frac{\rho_0}{K}}}{-1/K^2} = -zg\rho_0 e^{-zg\frac{\rho_0}{K}} \xrightarrow{K\to\infty} -zg\rho_0,$$

mientras que la densidad es,

$$p(z) \xrightarrow{K\to\infty} \rho_0.$$

Ahora remplazamos los valores dados en las ecuaciones para la presión del caso compresible e incompresible.

$$p_{compresible} = 2\times10^9 N/m^2\left(e^{(1000m\times9{,}8m/s^2\times1000Kg/m^3)/2\times10^9N/m^2} - 1)\right) = 9.824.049N/m^2,$$

$$p_{incompresible} = -(-1000m)\times9{,}8m/s^2\times1000Kg/m^3 = 9.800.000N/m^2.$$

Por lo tanto, el error relativo es,

$$E_p = \frac{24.049 N/m^2}{9.800.000 N/m^2} \approx 0,002.$$

Por otro lado para la densidad queda,

$$\rho_{compresible} = 1000 Kg/m^3 \times e^{1000m \times 9,8m/s^2 \times 1000Kg/m^3)/2\times 10^9 N/m^2} = 1005 Kg/2^3,$$

$$\rho_{incompresible} = 1000 Kg/m^3.$$

Por lo tanto, el error relativo es,

$$E_\rho = \frac{5Kg/m^3}{1000Kg/m^3} \approx 0,005.$$

Este resultado nos dice que tratar al agua como un fluido incompresible es una muy buena aproximación.

(III) En este inciso nos dicen que el fluido es un gas ideal, por lo tanto la ecuación de estado viene dada por $p = \rho RT/m$. Como el fluido se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F} = -g\hat{z}$, La ecuación de Euler se reduce a la ec.(2). Entonces,

$$\frac{RT}{mp}\frac{dp}{dz} = -g \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{RT}dz. \tag{5}$$

Si suponemos que el perfil de temperatura depende de z la ec.(5) nos queda,

$$ln(p/p_0) = -\frac{mg}{R}\int \frac{dz}{T(z)}.$$

Entonces, la expresión para la presión es,

$$p(z) = p_0 exp\left\{-\frac{mg}{R}\int \frac{dz}{T(z)}\right\}.$$

Con lo cual queda demostrado el inciso.

(IV) Planteando la ec.(2) para el caso del gas ideal vimos que solo nos quedaba una dependencia en $\hat{z}$, esto implica que la presión solo varia en la vertical. Si $T = T(x, y, z)$ entonces,

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = \frac{d}{dz}\left(ln(p)\right) = -\frac{mg}{RT}.$$

Podemos derivar todo por x y nos queda,

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dz}\left(ln(p)\right) = -\frac{d}{dx}\frac{mg}{RT} = \frac{mg}{RT^2}\frac{dT}{dx},$$

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\left(ln(p)\right) = \frac{mg}{RT^2}\frac{dT}{dx}.$$

Entonces para que valga esta relación $\frac{d}{dx}\left(ln(p)\right)$ tiene que ser distinto de 0, con lo cual,

$$\frac{D}{Dt}u_x = -\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Variaciones horizontales en la temperatura generan movimiento del gas.