Ejercicio 1

En este ejercicio nos piden determinar la ecuación de movimiento de las columnas de líquido de un tubo en "U", y resolver para las condiciones iniciales indicadas, suponiendo nulo el campo de velocidades inicial del líquido.

Primero vamos a plantear una serie de hipótesis:

(I) El ancho del tubo es constante.

(II) El fluido es incompresible.

De lo primero se desprende que la velocidad de la superficie del fluido en cada uno de los extremos es la misma, esto es fácil de ver mediante conservación del caudal. De lo segundo se concluye que la velocidad de cualquier elemento de fluido es la misma instantáneamente, ya que si la velocidad variara también lo haría su densidad.

Usamos la ecuación de Bernoulli no estacionaria y consideramos que el flujo es irrotacional,

$$\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2+\frac{P}{\rho}+gz\right]=0.$$

También vamos a considerar los extremos del tubo. Podemos usar un eje a lo largo del tubo sobre el cual proyectaremos la ecuación de Bernouli.

Con esto en mente nos quedaría la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}u^2+\frac{P}{\rho}+gz\right]=\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{1}{2}u^2+\frac{P}{\rho}+gz\right]=0.$$

Integrando entre los extremos del tubo (al que llamare 1 y 2) llegamos a la siguiente expresión,

$$\int_1^2 \frac{\partial u_l}{\partial t}dl+\frac{1}{2}\left({u_2}^2-{u_1}^2\right)+\frac{1}{\rho}\left(P_2-P_1\right)+g(z_2+z_1)=0.$$

Donde $u_l \equiv \frac{\partial \phi}{\partial l}$ es la velocidad a lo largo del tubo. Además de la ultima expresión sabemos que $u_1=u_2$, $p_1=p_2$ ya que estas presiones en los extremos del tubo son la presión externa y además $z_1=-z_2\equiv z(t)$. Con lo cual,

$$\int_1^2 \frac{\partial u_l}{\partial t}dl+2gz(t)=0.$$

Notar que la integral es sobre l, pero de las hipótesis concluimos que la velocidad de los elementos era la misma, con lo cual la velocidad no puede depender de la posición sobre el eje del tubo, teniendo esto en cuenta llegamos a la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{\partial u_l}{\partial t}(2h_0+l)+2gz(t)=0.$$

Llamo $L=2h_0+l$ y además $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\equiv\frac{\partial u_l}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{2g}{L}z=0.$$

Notar que la ecuación diferencial no depende de ρ pero si depende de L y g al igual que un péndulo.

Como saben, la solución a la ecuación diferencial es $z(t)=A\cos\omega t$ donde $\omega^2=\frac{2g}{L}$. Su derivada (la velocidad) se anula en $t=0$, y A dependerá de la posición inicial del sistema. De las hipótesis concluimos además que la velocidad obtenida no es solo la velocidad de la superficie del fluido, sino que esta es la velocidad de cada elemento de fluido.

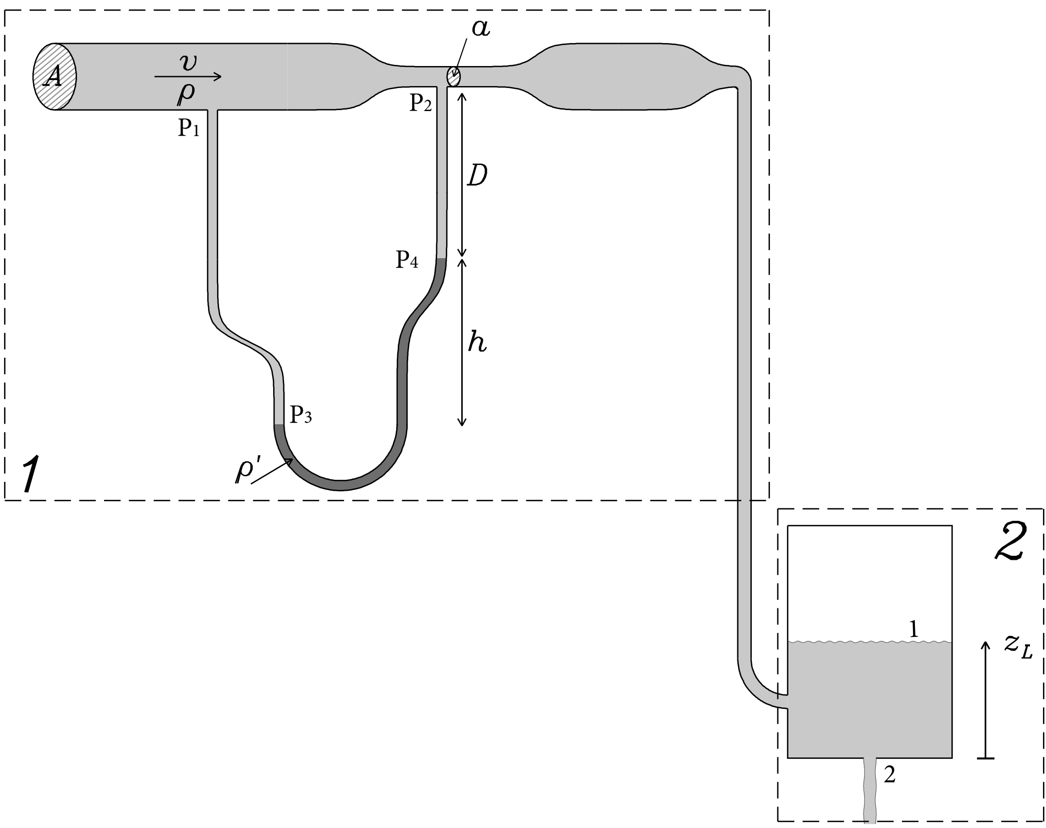
Estructura de la Materia 1 – Segunda Entrega

Problema 2

i) En primer lugar nos piden que averigüemos el caudal correspondiente al conducto horizontal. Trataremos de vincular los valores de presión y velocidad en el sector donde tenemos sección A con los correspondientes al sector donde se tiene sección a. Ni las velocidades ni las presiones son dato, pero podemos relacionar las velocidades por conservación del caudal. Si v_1 es la velocidad en el sector con sección A y v_2 donde la sección es a (hacemos la aproximación de que la velocidad es uniforme en cada sección del conducto)

$$v_1\, A = v_2\, a \quad .$$

También podemos vincular las presiones p_1 y p_2 (ver figura) por medio del conducto vertical donde



los líquidos se encuentran en reposo, por lo que la distribución de presiones corresponde al caso hidostático

$$p_3 = p_1 + \rho g(D + h) \quad ,$$

$$p_4 = p_3 - \rho' gh = p_1 + \rho g(D + h) - \rho' gh \quad ,$$

$$p_2 = p_4 - \rho gD = p_1 + \rho g(D + h) - \rho' gh - \rho gD = p_1 + (\rho - \rho')gh \quad .$$

Logramos vincular las presiones y las velocidades, ahora podemos pensar una línea de corriente que va desde el sector con sección A al sector con sección a, y usar el teorema de Bernoulli para fluidos estacionarios

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{A^2}{a^2}\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1 + (\rho - \rho')gh}{\rho} \Longrightarrow v_1^2\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right) = 2hg\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} \quad .$$

Teniendo en cuenta que $Q = Av_1$, podemos usar la última expresión para obtener

$$Q = \frac{Aa}{\sqrt{A^2 - a^2}}\sqrt{\frac{2hg(\rho' - \rho)}{\rho}} \quad .$$

ii) En la segunda parte del dispositivo tenemos un caudal de entrada Q y un caudal de salida dado por $A_1 v_s$. La velocidad de salida podemos estimarla suponiendo que el proceso de llenado del recipiente es cuasiestacionario. Vinculando mediante Bernoulli estacionario el punto 1 ($v_1 \sim 0$) con el 2 (ver figura) podemos estimar la velocidad de salida (v_s)

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_L = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} \Longrightarrow v_s = \sqrt{2gz_L} \quad ,$$

donde usamos el hecho de que en los dos puntos tenemos presión ambiente. Entonces la variación de volumen de fluido en el recipiente, dV, en un diferencial de tiempo dt será

$$dV = Sdz_L = (Q - A_1\sqrt{2gz_L})dt \Longrightarrow \int_0^H \frac{S\,dz_L}{Q - A_1\sqrt{2gz_L}} = \int_0^t dt' \quad .$$

La integral a resolver tiene la forma de la primitiva dada en la ayuda, por lo que es inmediato

$$t = -\frac{QS}{gA_1^2}\left[\ln\left(1 - \sqrt{\frac{2gHA_1^2}{Q^2}}\right) + \sqrt{\frac{2gHA_1^2}{Q^2}}\right] \quad .$$

Ejercicio 3

a) Estamos ante un flujo que, en este contexto, podemos aproximar mayormente como ideal. Es razonable además suponer que las mediciones han sido realizadas una vez que el flujo alcanzó un régimen estacionario. Si consideramos que el flujo es incompresible y que lejos del cilindro la densidad es uniforme, entonces esta debe ser necesariamente constante en todo el recinto. Sin embargo, si la estación 2 se halla lo suficientemente lejos del cilindro como para que las variaciones en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ sean despreciables, obtenemos que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, y por tanto al violarse el teorema de Kelvin debe haber una porción del flujo donde la aproximación de flujo ideal no sea válida. Esta región será naturalmente en la vecindad del objeto sólido.

Si consideramos ahora la ecuación de Euler en la dirección $\hat{\boldsymbol{y}}$ (válida lejos del cilindro) tenemos que

$$\left(u_x(y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{u_y}_{=0}\,\frac{\partial}{\partial y} \right) \underbrace{u_y}_{=0} = -\,\frac{\partial p}{\partial y}\,, \tag{1}$$

por lo que no existen variaciones verticales de presión en la estación 2.

Por otra parte, dado que lejos del cilindro el flujo puede aproximarse como ideal, podemos considerar una línea de corriente que conecte dos puntos que verifiquen $|y| \gg L$ y escribir el siguiente teorema de Bernoulli

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \mathcal{C}(\mathrm{LC}) \qquad \text{si } |y| \gg L, \tag{2}$$

con $\mathcal{C}$ una cantidad constante a lo largo de una línea de corriente. Luego, reemplazando por los valores en las estaciones 1 y 2 obtenemos

$$p_2 = p_0, \tag{3}$$

que por no haber a la altura de la estación 2 variación vertical de presión, permite concluir

$$\boxed{p_2 = p_0 \qquad \forall y.} \tag{4}$$

Dado que muches de ustedes plantearon la validez del teorema de Bernoulli sobre todo el fluido (notar que por la ecuación de Euler esto no puede ser así), a continuación adjuntamos como sería la resolución coherente con esa suposición. En virtud de la posible ambigüedad del enunciado para esta entrega la consideramos también válida.

Si bien no conocemos las líneas de corriente del flujo, sí podemos asegurar que al no haber fuentes en el volumen comprendido entre las estaciones, cada punto de la estación 2 se va a corresponder con un punto en 1 de forma que

$$\underbrace{\frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}}_{1} = \underbrace{\frac{u(y)^2}{2} + \frac{p(y)}{\rho}}_{2}, \tag{5}$$

y por lo tanto

$$p(y) = \rho\left(\frac{u_0^2}{2} - \frac{u(y)^2}{2}\right) + p_0. \tag{6}$$

Si se considera un punto tal que $|y| > L$ entonces $u(y) = u_0$ y recuperamos $p(y) = p_0$. Por otro lado, si $|y| \leq L$

$$p(y) = \rho\frac{u_0^2}{2}\left\{1 - \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^2 - \left(\frac{y}{L}\right)^4\right]^2\right\} + p_0, \tag{7}$$

finalmente el perfil buscado es

$$\boxed{p(y) = \begin{cases} \rho \frac{u_0^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{y}{L} \right)^2 - \left(\frac{y}{L} \right)^4 \right]^2 \right\} + p_0 & \text{si } |y| \leq L, \\ p_0 & \text{si } |y| > L. \end{cases}} \tag{8}$$

b) Por definición, la fuerza que ejerce un fluido ideal sobre un objeto sólido está dada por

$$\boldsymbol{F}^{\text{f-s}} = - \int_S p \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S, \tag{9}$$

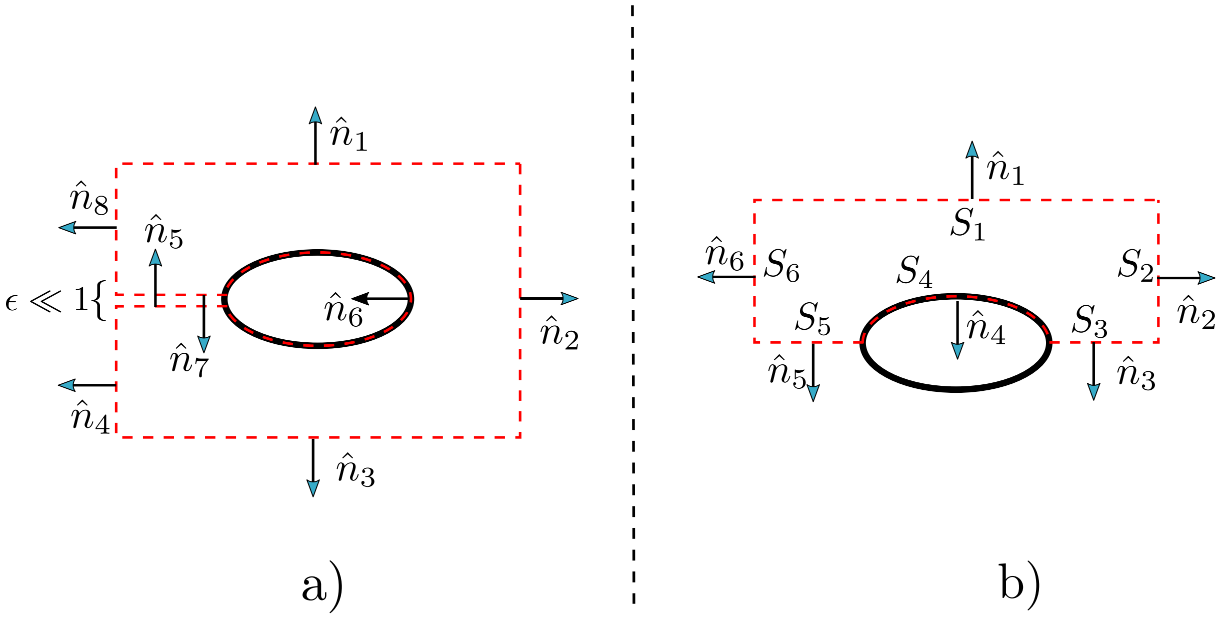
con S la superficie del sólido y $\hat{\boldsymbol{n}}$ la normal exterior al mismo.

Dado que hay simetría de reflexión con respecto al eje $\hat{\boldsymbol{x}}$, es inmediato concluir que la fuerza debe ser necesariamente nula en la dirección $\hat{\boldsymbol{y}}$. Notar que este mismo argumento no puede utilizarse para descartar $F_x^{\text{f-s}}$, ya que dada la presencia de la estela no hay simetría de reflexión con respecto a $\hat{\boldsymbol{y}}$.

Para este problema no conocemos la presión sobre el sólido. Sin embargo, dado que sí tenemos conocimiento de la velocidad y la presión lejos del cilindro, veremos que es posible hallar la fuerza mediante la conservación de la cantidad de movimiento. El teorema de conservación de cantidad de movimiento enuncia que sobre un volumen fijo en el espacio, debe verificarse

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial V} \left[\rho \boldsymbol{u} (\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) + p \hat{\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}S. \tag{10}$$

Para ello puede considerarse alguno de los volúmenes de control, propuestos por muches de ustedes en sus resoluciones, que se muestran en la figura siguiente. Vale mencionar que en **a)** se omitió nombrar explícitamente las superficies pero siguen la misma convención que la figura **b)**. Los esquemas mostrados representan cortes horizontales de superficies que se extienden infinitamente en la dirección normal a la figura $\hat{\boldsymbol{z}}$. Vale remarcar también que, formalidad matemática a parte, considerar el espesor ϵ en **a)** ayuda a orientar consistentemente la normal a utilizar. Vamos a considerar en adelante solo el volumen de control **b)**, el caso **a)** es similar.



A partir de la ecuación (10), dado que nuestro problema es estacionario, que el efecto de las fuerzas volumétricas es subdominante y que hay simetría de traslación en z se obtiene que por unidad de longitud en esta última dirección debe verificarse

$$\int_C [\rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) + (p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\ell] = 0, \tag{11}$$

con C un corte de ∂V en el plano xy, $\mathrm{d}\ell$ un diferencial de longitud de la curva resultante y donde se agregó un término $-\int_C p_0\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\ell$ puesto que al integrarlo sobre todo el contorno resulta nulo.

El término que involucra a la presión, proyectado en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ y expresado en término de los distintos tramos de curvas suaves es

$$\left[\int_C (p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\ell\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \int_{C_2}(p-p_0)\,\mathrm{d}\ell + \int_{C_4}(p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}_4\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\ell + \int_{C_6}(p-p_0)\,\mathrm{d}\ell, \tag{12}$$

ya que en los demás contornos $\hat{\boldsymbol{n}}\perp\hat{\boldsymbol{x}}$. Notar, además, que $\hat{\boldsymbol{n}}_4$ es la normal interna al sólido y por tanto

$$\int_{C_4}(p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}_4\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\ell = \int_{C_4} -(p-p_0)\underbrace{(-\hat{\boldsymbol{n}}_4)}_{\hat{\boldsymbol{n}}_{\text{ext}}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\ell \overset{\text{Ec.9}}{=} \frac{f_x^{\text{f-s}}}{2}, \tag{13}$$

donde $\boldsymbol{f}^{\text{f-s}}$ es la fuerza por unidad de longitud que el fluido ejerce sobre el sólido y el factor dos se debe a que solo se integra sobre la mitad superior del sólido pero hay simetría de reflexión con respecto al eje $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Por otra parte, los términos asociados a la advección de momento proyectados en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ resultan

$$\left[\int_C \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}\ell\right]\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \int_C \rho u_x(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}\ell = \int_{C_1}\rho u_x(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1)\,\mathrm{d}\ell + \int_{C_2}\rho u_x(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2)\,\mathrm{d}\ell + \int_{C_6}\rho u_x(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_6)\,\mathrm{d}\ell, \tag{14}$$

donde las demás integrales se anulan ya que por la simetría del problema $C_3\cup C_4\cup C_5$ debe ser necesariamente una línea de corriente y por tanto allí $\boldsymbol{u}\perp\hat{\boldsymbol{n}}$. Llegado este punto es necesario hacer alguna suposición sobre $\int_{C_1}\rho u_x(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1)\,\mathrm{d}\ell$. Lo más simple es considerar que los segmentos C_2 y C_6 son lo suficientemente extensos como para poder despreciar los efectos del cilindro y de esta manera las líneas de corriente serán aproximadamente horizontales, llevando a que $\boldsymbol{u}\perp\hat{\boldsymbol{n}}_1$ allí. Es importante remarcar que esta aproximación también es necesaria en caso que se escoja el volumen de control **a)**, puesto esta integral no se cancela con la equivalente por debajo del cilindro cuando hay simetría de reflexión (hagan la cuenta).

Con estas consideraciones, juntando las ecuaciones ecuaciones (11) a (14) tenemos

$$\frac{f_x^{\text{f-s}}}{2} = -\int_{C_2}(p(y)-p_0)\,\mathrm{d}\ell - \int_{C_6}\cancelto{0}{\underbrace{(p-p_0)}_{p|_{C_6}=p_0}}\,\mathrm{d}\ell - \int_{C_2}\rho u(y)\underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2)}_{u(y)}\,\mathrm{d}\ell - \int_{C_6}\rho u_0\underbrace{(\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_6)}_{-u_0}\,\mathrm{d}\ell. \tag{15}$$

Llegado este punto hay que notar que la resolución correcta del inciso a) hace que la integral de la presión sobre C_2 se cancele. Sin embargo, de aquí en más vamos a considerar la resolución que muches de ustedes realizaron por motivos pedagógicos. En cualquier caso, fuera del intervalo $[0,L]$ las integrales de la velocidad se cancelan mutuamente, por lo que alcanza con integrarlas en esta región. A partir de lo hallado en el inciso anterior podemos reemplazar por la presión en la estación 2, obteniendo

$$\frac{f_x^{\text{f-s}}}{2} = -\int_0^L \frac{\rho}{2}\left(u_0^2 - u(y)^2\right)\mathrm{d}y - \int_0^L \rho u^2(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^L \rho u_0^2\,\mathrm{d}y. = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left(u_0^2 - u(y)^2\right)\mathrm{d}y, \tag{16}$$

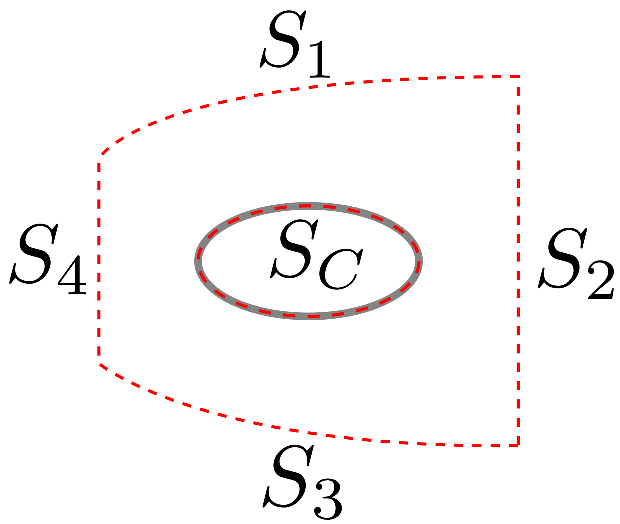
y utilizando la expresión para $u(y)$

$$\begin{aligned}\frac{f_x^{\text{f-s}}}{2} &= \frac{\rho u_0^2}{2}\int_0^L \left\{1 - \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^2 - \left(\frac{y}{L}\right)^4\right]^2\right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\rho u_0^2}{2}\int_0^L \left[\frac{3}{4} - \frac{y^2}{L^2} - \frac{y^4}{2L^4} + \frac{y^6}{L^2} - \frac{y^8}{L^8}\right] \mathrm{d}y \\ &= \frac{\rho u_0^2}{2}\frac{136}{315}L, \end{aligned} \tag{17}$$

y entonces

$$\boxed{f_x^{\text{f-s}} = \frac{136}{315}\rho u_0^2 L.} \tag{18}$$

Finalmente, para les que no lo hicieron así, queremos dejarles para que piensen como sería la resolución con el siguiente volumen de control (obviando ya la consideración de un espesor ϵ de forma tal que la superficie sea simplemente conexa, ¡pero recuerden orientar consistentemente las normales!)



donde las superficies S_1 y S_3 son líneas de corriente que conectan puntos de (1) y (2) en los cuales $\boldsymbol{u} = u_0\hat{x}$ y sus alturas deben ser necesariamente tales que se conserve el caudal. Noten que, de alguna manera, es lo que terminamos haciendo con los volúmenes de control anteriores al tomar la aproximación $|C_2| \gg L$, aproximación que no es necesaria si se escoge el volumen de control aquí propuesto.