ENTREGA DE EJERCICIOS DE LA GUIA 0 (RESUELTOS)

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 1 - PABLO COBELLI

1. Problema 2.

Demuestre que todo tensor de segundo orden σ_{ij}, con $1 \leq i, j \leq n$ se puede descomponer como:

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij},$$

donde λ es un escalar, s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula, y a_{ij} es un tensor antisimétrico.

Resolución.

En la resolución que sigue vamos a usar colores para identificar términos, de esta forma no *ensuciamos* demasiado las ecuaciones.

La descomposición en parte simétrica y antisimétrica la vimos en clases teóricas; partimos de ahí:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}\right).$$

Lo único que nos resta es separar la parte simétrica en una parte (simétrica) de traza nula y otra diagonal. Esto puede hacerse así:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \equiv s_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}, \end{aligned}$$

donde hemos definido $\lambda = \sigma_{kk}/3$. Es fácil ver que s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula; debe serlo por construcción. Calculemos su traza:

$$\operatorname{Tr}\left(s_{ij}\right) = s_{ii} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii} + \sigma_{ii}\right) - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\, 3 = \sigma_{ii} - \sigma_{kk} = 0.$$

Mostramos así que

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}\right).$$

2. Problema 3

Este problema propone demostrar, empleando notación indicial, varias identidades vectoriales comunes. Consideramos cada inciso requerido por separado.

2.1. **Inciso i.**

Consideramos el triple producto; en particular su componente i-ésima:

$$[\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})]_i = u_i[\vec{v} \times \vec{w}]_i = u_i\epsilon_{ijk}u_jv_k = \epsilon_{ijk}u_iv_jw_k.$$

Pero dado que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$, esta última expresión se puede escribir de otras formas:

$$\epsilon_{ijk}u_iv_jw_k = \epsilon_{jki}u_iv_jw_k = \epsilon_{kij}u_iv_jw_k,$$

obteniendo las expresiones que buscamos y probando que el triple producto puede permutarse cíclicamente.

2.2. **Inciso xvii.** Arranquemos por el lado derecho de la expresión que buscamos probar; en particular consideramos su componente i-ésima:

$$
\begin{aligned}
[\text{lado derecho}]_i &= \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l v_m + u_j \partial_j v_i + \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m + v_j \partial_j u_i = \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} u_j \partial_l v_m + u_j \partial_j v_i + \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} v_j \partial_l u_m + v_j \partial_j u_i = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_j \partial_l v_m + u_j \partial_j v_i + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) v_j \partial_l u_m + v_j \partial_j u_i = \\
&= u_j \partial_i v_j + v_j \partial_i u_j = \\
&= \partial_i (u_j v_j) = \\
&= [\text{lado izquierdo}]_i.
\end{aligned}
$$

2.3. **Inciso xviii.** Arrancando por la componente i-ésima del último término, tenemos:

$$\epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l u_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l u_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \partial_j \partial_i u_m = \partial_j \partial_i u_j - \partial_j \partial_j u_i = \partial_i (\partial_j u_j) - \partial_j \partial_j u_i.$$

2.4. **Inciso xix.** Tomemos, por ejemplo, el último término del lado derecho; como siempre, su componente i-ésima:

$$
\begin{aligned}
[\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})]_i &= \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_j \partial_j u_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_j \partial_l u_m = \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} u_j \partial_l u_m - \delta_{im}\delta_{jl} u_j \partial_l u_m = \\
&= u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i = \\
&= {}^1\!/_2\, \partial_i (u_j u_j) - u_j \partial_j u_i,
\end{aligned}
$$

que es lo que buscábamos demostrar.