Ejercicio 1

(a) En este inciso nos piden calcular la superficie de una plancha de telgopor a partir de los datos proporcionados. Vamos a calcular el valor de la superficie conociendo como se relaciona la presión y la fuerza ejercida por el cuerpo.

Supongamos que el sistema esta en reposo y que el flujo es estacionario. Por lo tanto la ecuación de Euler es la siguiente,

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} + \boldsymbol{f} = 0, \tag{1}$$

en este caso $\boldsymbol{f}$ es debida a la gravedad, que al ser conservativa se deriva de un potencial $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. Teniendo esto en cuenta la ec.(1) resulta,

$$\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{p}{\rho} + \phi\right] = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\phi = zg$ la presión va a ser,

$$p(z) = \rho z g + cte. \tag{2}$$

Vamos a poner un sistema de referencia en el centro de masa de la plancha de telgopor (que coincide con la superficie del agua) como se observa en la fig.(1a). Con lo cual, para la ec.(2) se tendrá que $p(z \geq 0) = p_0$, llegando a la siguiente expresión para la presión,

$$p(z) = \begin{cases} p_0 + \rho z g & si\ \ z \leq 0 \\ p_0 & si\ \ z \geq 0 \end{cases}$$

Para encontrar como se relaciona la presión con la fuerza partimos de la ecuación de balance de impulso. Como en este caso $\boldsymbol{u} = 0$ la ecuación se reduce a,

$$-\int_s p\hat{n} ds - \int_v \boldsymbol{f} dv = 0, \tag{3}$$

donde v es el volumen de la plancha de telgopor mas la del hielo y s su superficie. La ec.(3), remplazando p y teniendo en cuenta que la fuerza de volumen aplicada es la de gravedad, queda reescrita como,

$$-\int_s p_0 \hat{n} ds - \int_s \rho z g \hat{n} ds = \int_{v_h} \rho_h \boldsymbol{g} dv + \int_{v_t} \rho_t \boldsymbol{g} dv. \tag{4}$$

La primera integral es nula, ya que es la integral de la presión externa sobre una superficie cerrada. De la segunda integral los términos con normal $\hat{x}$ e $\hat{y}$ se cancelan y solo queda la superficie inferior de la plancha. La tercer y cuarta integral son la fuerza peso del hielo y la plancha respectivamente. Por simplicidad vamos a tomar el modulo, y vamos a tener en cuenta que la superficie no depende de z y se encuentra en la posición $z = -d$, adamas el volumen del telgopor es $v_t = 2ds$,

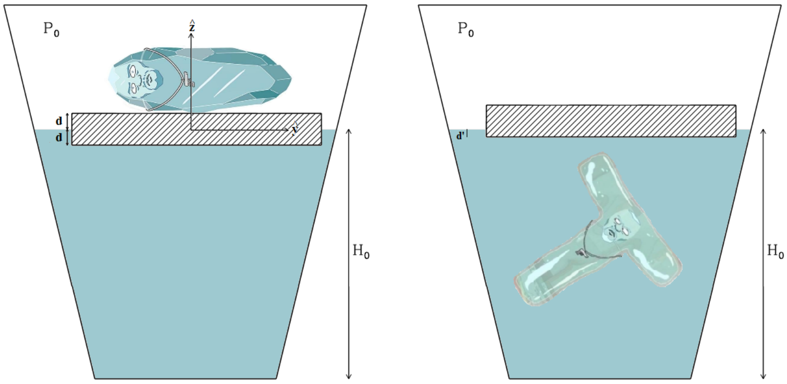
$$\rho d s g = M_h g + \rho_t 2 d s g. \tag{5}$$

Solo queda despejar S y remplazar los datos que brinda el ejercicio; $M_h = 10000g$, $d = 3cm$, $\rho = 1g/cm^3$ y $\rho_t = 0.02g/cm^3$,

$$s = \frac{M_h}{d(\rho - 2\rho_t)}.$$

$$s = \frac{10000}{3(1 - 2 \times 0.02)} cm^2 = 3472,22 cm^2.$$

(b) Luego de un tiempo el hielo se derrite y escurre hacia el recipiente. Como bien argumentaron, por el principio de Arquímedes “Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del fluido desalojado”. Por lo tanto, el hielo sobre la plancha de telgopor desplazaba un



(a) Ice T

(b) Water T

Figure 1: Plancha de telgopor dentro de un recipiente con agua. (a) El hielo se encuentra sobre la plancha de telgopor. (b) El hielo se derrite y escurre hacia el recipiente

masa de agua equivalente, y al derretirse y escurrir hacia el recipiente el nivel de agua se mantiene constante. Para ver esto ultimo podemos partir directamente de la ec.(5), bajo estas condiciones, el d del lado izquierdo de la ecuación seria el d' de la fig.(1b) y $M_h = 0$,

$$d' = \frac{\rho_t}{\rho} 2d = 0.12cm.$$

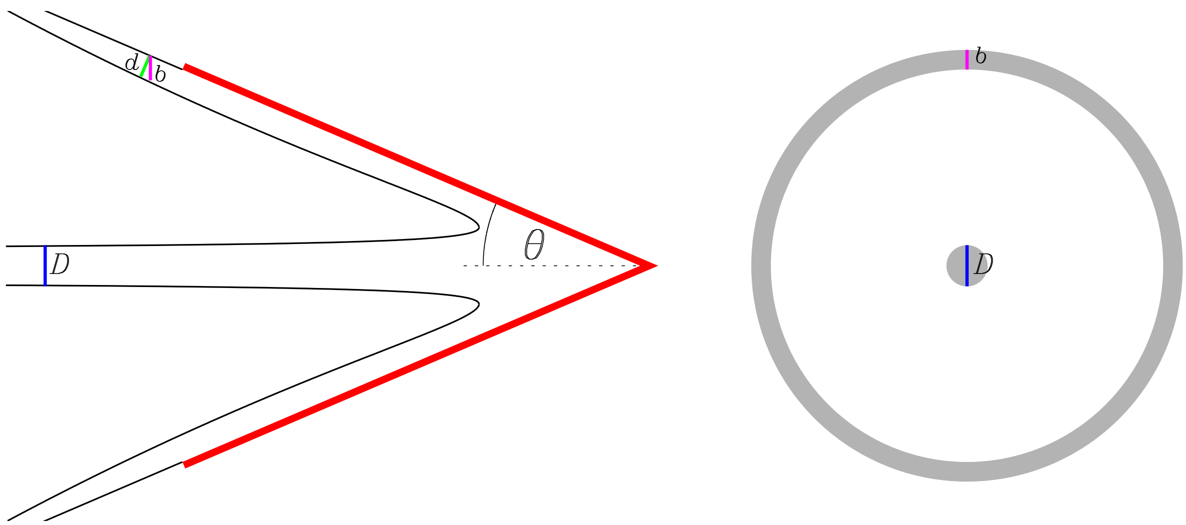
Si a la d le restamos el nuevo d' y lo multiplicamos por la superficie obtendríamos el volumen desplazado por el hielo, y si lo multiplicamos por la densidad del agua (trivial) obtenemos la masa equivalente,

$$M_{agua} = \rho s(d - d') = 3472,22 \times (3 - 0.12)g = 10000g = M_{hielo}$$

Por lo tanto, el volumen que deja de desplazar el hielo es igual al volumen de agua que incorpora al derretirse.

Problema 2

i) Nos piden encontrar el ancho de la lámina de fluido que abandona el embudo cónico. Si tomamos una sección con un plano normal a la dirección del jet incidente veremos lo que se indica en el esquema derecho de la figura, en el medio el jet incidente y en el exterior un anillo de ancho b que representa la lámina de fluido saliente. Por conservación del caudal la cantidad de fluido entrante debe ser igual a la de fluido saliente. Por otro lado, podemos imaginar una línea de corriente que va desde un punto 1 en el jet incidente (donde la velocidad es V) hasta un punto 2 en el flujo saliente, ambos puntos alejados de la influencia del contorno sólido, es decir en zonas donde las líneas de corriente sean paralelas.



La versión del teorema de Bernoulli para fluidos estacionarios nos dice

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} \quad ,$$

donde v_s es la velocidad de salida. Como dijimos antes, lejos de la zona de influencia del cono, las líneas de corriente son paralelas y la presión dentro del fluido, como en la interfase con el aire, será la atmosférica. Por eso tendremos $v_s = V$, lo que nos dice que la conservación del caudal implica en este caso la igualdad de las secciones de entrada y de salida (círculo y anillo)

$$Q_e = Q_s \Longrightarrow A_e = A_s \Longrightarrow \frac{\pi D^2}{4} = \pi[r^2 - (r-b)^2] \quad ,$$

donde r es el radio del círculo mayor en el esquema de la derecha. Como nos piden el ancho de la lámina de fluido en función de la distancia al vértice ℓ del cono, suplantamos $r = \ell \sin\theta$. Obtenemos entonces

$$\frac{D^2}{4} = (\ell \sin\theta)^2 - (\ell\sin\theta - b)^2 \Longrightarrow b = \ell\sin\theta - \sqrt{\ell^2\sin^2\theta - \frac{D^2}{4}} \quad ,$$

donde nos hemos quedado con la solución que en todo caso nos asegura $b < \ell$. Ahora notemos que nuestra solución se ha calculado para un anillo con normal $\hat{z}$, mientras que la direccón del flujo es

$\cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{r}$, el espesor de la lámina se define naturalmente como el ancho de la misma medida en la dirección normal a la superficie del cono. Es por ello que, para cumplir con la conservación del caudal debemos incrementar el espesor por un factor $(1/\cos\theta)$, obteniéndose en definitiva

$$d = \ell\tan\theta - \sqrt{\ell^2\tan^2\theta - \frac{D^2}{4\cos^2\theta}}$$

ii) Para calcular la fuerza sobre el cono usamos el teorema de conservación de la cantidad de movimiento, en el caso estacionario

$$0 = \oint_s [(p - p_0)\hat{n} + \rho\vec{v}(\vec{v}.\hat{n})]dS \quad .$$

El volumen de control puede ser como el indicado en la parte izquierda de la figura, cerrado por el anillo resultante de la revolución del segmento d. El término de presión se anula sobre toda la superficie excepto sobre el sólido, este término representa la fuerza neta que el fluido le ejerce al cono. Del término de velocidades en la integral sólo sobreviven las "tapas" (el circulito de fluido entrante y el anillo de fluido saliente en la parte derecha de la figura), ya que en el resto de la superficie $\vec{v} \perp \hat{n}$. Teniendo en cuenta que la fuerza $\vec{F}$ que hay que aplicar sobre el cono para que permanezca en reposo es la que realiza el fluido cambiada de signo

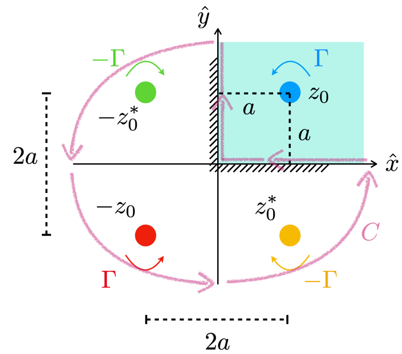
$$\underbrace{\int_{cono}(p - p_0)\hat{n}ds}_{-\vec{F}} + \int_{Jet}\rho[-V\hat{z}(-V\hat{z}.\hat{z})]dS + \int_{anillo}\rho V\hat{n}.(V\hat{n}.\hat{n})dS = 0 \quad ,$$

usando que $\hat{n} = \cos\theta\hat{z} + \sin\theta\hat{r}$, que el área del jet y del anillo son $\pi D^2/4$ y que por simetría las contribuciones en $\hat{r}$ se anulan

$$\vec{F} = \frac{\rho\pi D^2 V^2}{4}(1 + \cos\theta) \quad .$$

Problema 3.

Inciso (a). Tenemos un vórtice con circulación Γ ubicado en $z_0 = a + i\,a$, frente a una esquina cuya ubicación elegimos coincidente con el origen de coordenadas. Empleamos la identificación usual $z = x + i\,y$. Vemos que para satisfacer las condiciones de contorno necesitamos disponer 3 vórtices imágenes, ubicados uno en $-a + ia \equiv -z_0^*$, otro en $-a - ia \equiv -z_0$ y uno más en $a - ia \equiv z_0^*$. Estos tendrán circulación $-\Gamma$, Γ y $-\Gamma$, respectivamente. El potencial complejo de la configuración queda:



$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\log(z - z_0) - \log(z + z_0^*) + \log(z + z_0) - \log(z - z_0^*)\right].$$

Inciso (b). Para ver que se satisfacen las condiciones de contorno podemos optar por calcular la función corriente ψ y mostrar que su valor es constante sobre el contorno de la esquina. Sabemos que $\psi(z) = \mathrm{Im}\{W(z)\}$. Notamos que todos los sumandos contienen términos de la forma $\log(\cdot)$, y que $\log(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$. Entonces la parte imaginaria del potencial $W(z)$ sólo contendrá términos con $\log|z|$. Luego podemos escribir

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\log|z - z_0| - \log|z + z_0^*| + \log|z + z_0| - \log|z - z_0^*|\right] = \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left|\frac{(z - z_0)(z + z_0)}{(z + z_0^*)(z - z_0^*)}\right| = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left|\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0^{*2}}\right| = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left|\frac{x^2 + 2ixy - y^2 - 2ia^2}{x^2 + 2ixy - y^2 + 2ia^2}\right|.\end{aligned}$$

Vemos que sobre el eje $\hat{x}$ (donde vale $y = 0$) resulta

$$\psi(x, y = 0) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left|\frac{x^2 - 2ia^2}{x^2 + 2ia^2}\right| = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log 1 = 0,$$

y sobre el eje $\hat{y}$ (donde vale $x = 0$) tenemos

$$\psi(x = 0, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\left|\frac{-y^2 - 2ia^2}{-y^2 + 2ia^2}\right| = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log 1 = 0.$$

Notemos que lo importante no es que hayamos obtenido un cero como respuesta sino que el valor de ψ sobre el contorno es constante, lo que nos dice que el contorno constituye efectivamente una línea de corriente y por ende la configuración de imágenes satisface las condiciones de contorno físicas buscadas.

Inciso (c). Si tomamos el contorno cerrado C como uno que rodea a la esquina dejando dentro al sólido y fuera al fluido, sabemos que la fuerza viene dada por

$$F^* = i\,\frac{\rho}{2}\oint_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = -\pi\rho\sum_k \mathrm{Res}\left\{\left(\frac{dW}{dz}\right)^2; z_k\right\},$$

donde C está orientada positivamente (es decir, si camináramos sobre C en el sentido de su orientación, el sólido quedaría siempre a nuestra izquierda).

El integrando ya lo tenemos, vale:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z + z_0^*} + \frac{1}{z + z_0} - \frac{1}{z - z_0^*}\right]^2. \tag{1}$$

Calculemos entonces los residuos de $(\frac{dW}{dz})^2$ en esos puntos, intentando no hacer cuentas de más. Separemos los términos del cuadrado del corchete de la ecuación (1). En ese cuadrado habrá un total de 10 términos: 4 de ellos serán los cuadrados de cada uno de los sumandos del corchete; los 6 términos restantes serán los dobles-productos de cada par de términos del corchete de la ecuación (1). Sabemos ya que los cuadrados no darán residuos. Por otro lado, de los 6 términos de tipo doble-producto, sabemos que sólo contribuyen a los residuos aquellos que multipliquen una singularidad interna a C con una externa. Hay 1 singularidad externa (en $z = z_0$) y 3 singularidades internas (en $z = -z_0^*$, $z = z_0^*$ y $z = -z_0$), con lo cuál sólo 3 términos contribuyen a los residuos dentro de C.

En virtud de esto último, para el objetivo del cálculo de residuos dentro de C, podemos escribir esquemáticamente

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \Bigg[\underbrace{\begin{matrix}\text{4 términos}\\ \text{tipo cuadrado}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{3 términos}\\ \text{tipo doble-producto}\end{matrix}}_{\substack{\text{que no contribuyen}\\ \text{al cálculo de residuos en } C}} + A \Bigg]$$

donde con A estamos representando a los únicos 3 términos de tipo doble-producto que sí aportan al cálculo de residuos, es decir:

$$A \equiv 2\left[-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{z+z_0^*} + \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{z+z_0} - \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{z-z_0^*}\right],$$

donde el factor 2 delante del corchete proviene del hecho de que se trata de doble-productos de términos.

Luego calcular los residuos de $(\frac{dW}{dz})^2$ en $-z_0^*, z_0^*$ y $-z_0$ es calcular los residuos de A en esos puntos (a menos de un factor multiplicativo, claro). Calcular estos 3 residuos es fácil (no hace falta reexpresar ningún término); y en realidad el *cálculo* consiste únicamente en identificar el prefactor en el desarrollo en serie de Laurent que ya tenemos en la expresión para A. Los residuos en cada una de esas 3 singularidades resultan:

$$\mathrm{Res}\,\{A; z = -z_0^*\} = -\frac{2}{-z_0^* - z_0} = \frac{2}{a - ia + a + ia} = \frac{1}{a}.$$

$$\mathrm{Res}\,\{A; z = z_0^*\} = -\frac{2}{z_0^* - z_0} = -\frac{2}{a - ia - a - ia} = -\frac{1}{-ia} = -\frac{i}{a}.$$

$$\mathrm{Res}\,\{A; z = -z_0\} = \frac{2}{-z_0 - z_0} = -\frac{1}{a+ia} = -\frac{1}{a+ia}\cdot\frac{a-ia}{a-ia} = \frac{i-1}{2a}.$$

Retomando entonces la expresión genérica para el conjugado de la fuerza, obtenemos:

$$\begin{aligned} F^* &= -\pi\rho\left[-\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\right]\Big[\mathrm{Res}\,\{A; -z_0^*\} + \mathrm{Res}\,\{A; z_0^*\} + \mathrm{Res}\,\{A; -z_0\}\Big] = \\ &= \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{i}{a} + \frac{i-1}{2a}\right) = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi}\left(\frac{1-i}{2a}\right) = \\ &= \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi a}(1-i). \end{aligned}$$

Dado que esta expresión corresponde al conjugado de la fuerza compleja, vemos que la fuerza que el flujo ejerce sobre la esquina es tal que ‘atrae’ al sólido hacia el vórtice en la misma medida en las direcciones vertical y horizontal.