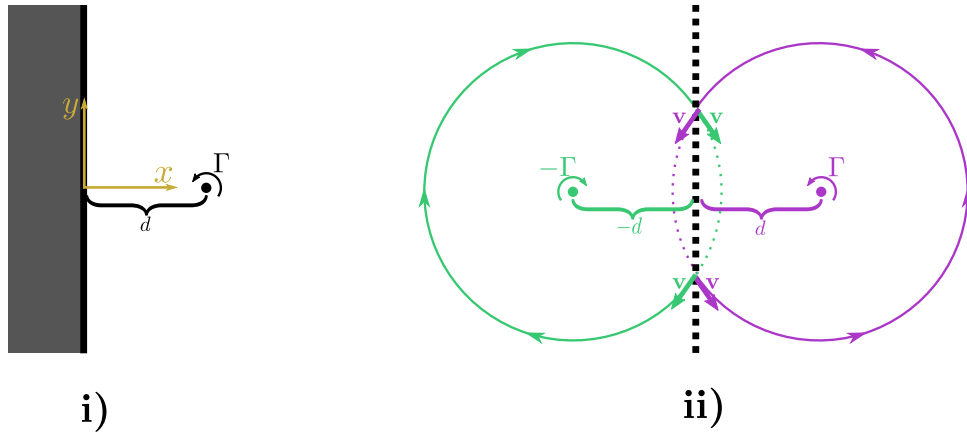


Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios de la tercera entrega de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos sólo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación de las entregas.**
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Problema 1



a) En este ítem nos piden hallar el potencial complejo correspondiente a la configuración donde un vórtice de circulación Γ enfrenta un plano (figura **i**). Una estrategia posible es resolver la ecuación diferencial explícitamente el problema $W' = v^*$ con la condición de contorno $\text{Re}\{v\}|_{x=0} = 0$. Otra alternativa, sensiblemente más breve, es utilizar el *método de las imágenes*. La idea detrás de este método es construir la solución utilizando soluciones a problemas conocidos y superponiéndolas sin agregar fuentes en el dominio físico $x \geq 0$, de forma tal de generar la condición de contorno deseada.

Para lograr arribar a esta solución es útil esquematizar las líneas de corriente del flujo generado por un vórtice de circulación Γ que se encuentra solo en el espacio. Como se puede ver en la figura **ii**), estas líneas son círculos centrados en el vórtice (ver por ejemplo el círculo violeta). Dado que precisamos que la componente de la velocidad normal a la pared v_x se anule sobre toda la recta $x = 0$ será necesario colocar un vórtice del otro lado de la pared y a una distancia d , de forma tal que los potenciales del vórtice real y del vórtice imagen tengan la misma relación funcional sobre $z = iy$. Adicionalmente, como se ve también en la misma figura, para lograr cancelar la componente normal a la pared es necesario que el vórtice imagen tenga una circulación opuesta al real.

Recordando ahora los resultados obtenidos en la teórica (y derivados también por ustedes en la práctica), el potencial complejo correspondiente a un vórtice de circulación Γ ubicado en z_0 está dado por

$$W_{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad (1)$$

por lo que, por superposición, el potencial complejo para nuestro problema es

$$W(z) = W_{\Gamma}(z) + W_{-\Gamma}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - d) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + d), \quad (2)$$

y finalmente

$$W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{z-d}{z+d}\right) \quad \text{Re}\{z\} \geq 0. \quad (3)$$

b) Para obtener la función corriente de nuestro problema es útil recordar que el potencial complejo puede pensarse como compuesto por dos funciones reales $W(z) = \phi(z) + i\psi(z)$, donde ϕ es el potencial de la velocidad, de forma que $\mathbf{v}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ y ψ es la función corriente tal que $\mathbf{v}(x, y) = \nabla \times \psi(x, y)\hat{\mathbf{z}}$. Equivalentemente, podemos pensar $\psi = \text{Im}\{W\}$. De esta manera, recordando que por definición el logaritmo complejo en su rama principal se define como $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, obtenemos la función

corriente

$$\psi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-d}{z+d} \right|. \quad (4)$$

c) Como vimos en las clases teóricas y usamos numerosas veces en las prácticas, la función corriente ψ tiene la propiedad de que $\psi(x, y) = \text{constante}$ define una familia de curvas que son, precisamente, las líneas de corriente del flujo. Dado que en el inciso anterior obtuvimos la función corriente en términos de la variable compleja z , podemos hallar $\psi(x, y)$ sencillamente reemplazando por $z = x + iy$ tenemos

$$\psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{x+iy-d}{x+iy+d} \right| = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left[\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} \right], \quad (5)$$

donde se utilizó que $\ln(a^{1/2}) = \ln(a)/2$. Las líneas de corriente quedan entonces definidas por

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left[\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} \right] = b. \quad (6)$$

Podemos también utilizar esta expresión para ver que la solución propuesta efectivamente verifica las condiciones de contorno (algo que hasta ahora dedujimos utilizando un método gráfico). Para eso podemos evaluar la función corriente sobre la recta $x = 0$, obteniendo

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left[\frac{d^2 + y^2}{d^2 + y^2} \right] = 0, \quad (7)$$

por lo que efectivamente la pared es una línea de corriente y por lo tanto la velocidad normal se anula sobre ella.

d) Para encontrar una expresión funcional para las líneas de corriente es de utilidad la expresión hallada anteriormente para $\psi(z)$. Las líneas de corriente quedan definidas por

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

y por tanto

$$\left(\frac{z-d}{z+d} \right) \left(\frac{z^*-d}{z^*+d} \right) = e^{-4\pi b/\Gamma} = c^2, \quad (9)$$

donde nombramos $e^{-4\pi b/\Gamma} = c^2$ ya que debe ser necesariamente positivo. Notemos además que como consecuencia de que el dominio físico está dado por $\text{Re}\{z\} \geq 0$, entonces $|z-d| \leq |z+d|$. Esto último implica $b \geq 0$ y por tanto $\exp(-4\pi b/\Gamma) = c^2 \leq 1$. Desarrollando la ecuación (9) se obtiene el conjunto de igualdades

$$|z|^2 - zd - z^*d + d^2 = c^2(|z|^2 + zd + z^*d + d^2), \quad (10)$$

$$(1-c^2)(|z|^2 + d^2) = d(1+c^2)(z+z^*), \quad (11)$$

$$|z|^2 + d^2 - (z+z^*)d \frac{1+c^2}{1-c^2} = 0, \quad (12)$$

$$|z|^2 - (z+z^*)d \frac{1+c^2}{1-c^2} + d^2 \frac{(1+c^2)^2}{(1-c^2)^2} = d^2 \frac{(1+c^2)^2}{(1-c^2)^2} - d^2, \quad (13)$$

$$\left(z - d \frac{1+c^2}{1-c^2} \right) \left(z^* - d \frac{1+c^2}{1-c^2} \right) = \frac{d^2(1+c^2)^2 - d^2(1-c^2)^2}{(1-c^2)^2}, \quad (14)$$

$$\left| z - d \frac{1+c^2}{1-c^2} \right|^2 = \frac{4d^2c^2}{(1-c^2)^2}, \quad (15)$$

y por tanto la ecuación de las líneas de corriente queda dada por

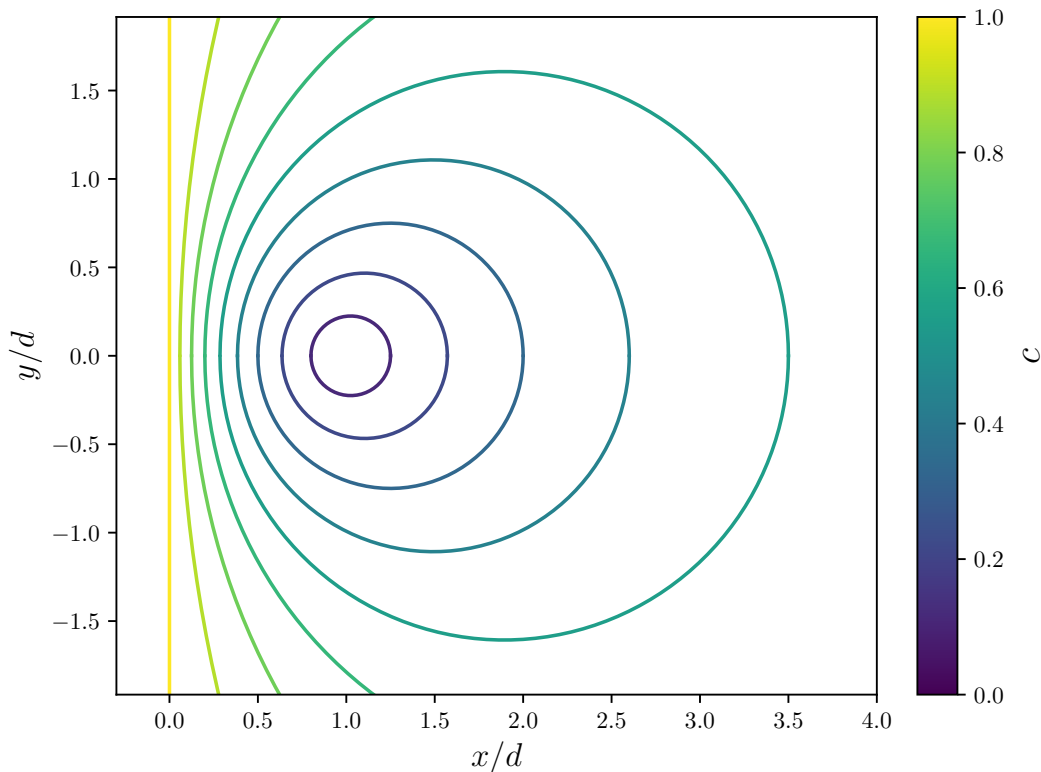
$$\left| z - d \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right| = \frac{2dc}{1 - c^2}, \quad 0 \leq c^2 \leq 1, \quad (16)$$

que es la ecuación de una circunferencia centrado en $z_c = d(1 + c^2)/(1 - c^2)$ de radio $2dc/(1 - c^2)$.

Notemos que para el caso $c \rightarrow 0$ se obtiene una circunferencia de radio nulo y centro en d , lo que representa la posición del vórtice real.

Por otra parte, el caso $c = 1$ se produce cuando $\exp(-4\pi b/\Gamma) = 1$, es decir cuando $b = 0$. Como vimos en el inciso anterior $b = 0$ se corresponde con la línea de corriente $x = 0$, dada por la condición de contorno en la pared.

Esto puede verse más claro en el siguiente gráfico que muestra las líneas de corriente.



e) Para hallar el perfil de presiones es necesario tener en cuenta que velocidad y presión están necesariamente relacionados por la ecuación de Euler. En particular, además, dado que estamos ante un flujo irrotacional y con densidad uniforme podemos escribir el siguiente teorema de Bernoulli, válido sobre todo el fluido

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi = \mathcal{C}(t), \quad (17)$$

con ϕ el potencial de la velocidad, Φ el potencial de las fuerzas conservativas actuantes y $\mathcal{C}(t)$ una constante dependiente del tiempo. Considerando además que nuestro problema es estacionario y no involucra fuerzas volumétricas este teorema establece la relación

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \mathcal{C}, \quad (18)$$

y por consiguiente

$$\frac{v^2(y)}{2} + \frac{p(y)}{\rho} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}, \quad (19)$$

con $v(y)$ y $p(y)$ la velocidad y presión sobre la recta $x = 0$ y v_∞ y p_∞ las mismas variables con $|z| \rightarrow \infty$.

Dado que, por definición, $W' = v^*$, se sigue que $v^2 = W'W'^*$. Utilizando la expresión para W hallada en **a)** podemos encontrar explícitamente W'

$$W' = -\frac{i\Gamma}{2\pi} [\ln(z-d) - \ln(z+d)]' = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{z-d} - \frac{1}{z+d} \right] = -\frac{i\Gamma}{\pi} \frac{d}{z^2 - d^2}, \quad (20)$$

y por lo tanto $v^2/2$ es

$$\frac{v^2}{2} = \frac{W'W'^*}{2} = \left(-\frac{i\Gamma}{\pi} \frac{d}{z^2 - d^2} \right) \left(\frac{i\Gamma}{\pi} \frac{d}{z^{*2} - d^2} \right) = \frac{\Gamma^2 d^2}{2\pi^2} \frac{1}{|z^2 - d^2|^2}, \quad (21)$$

donde es inmediato notar que $v^2 \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. Para obtener la energía cinética por unidad de masa sobre la pared $v(y)$ basta sencillamente con evaluar en $z = iy$. Reemplazando en el teorema de Bernoulli obtenemos la presión sobre la pared

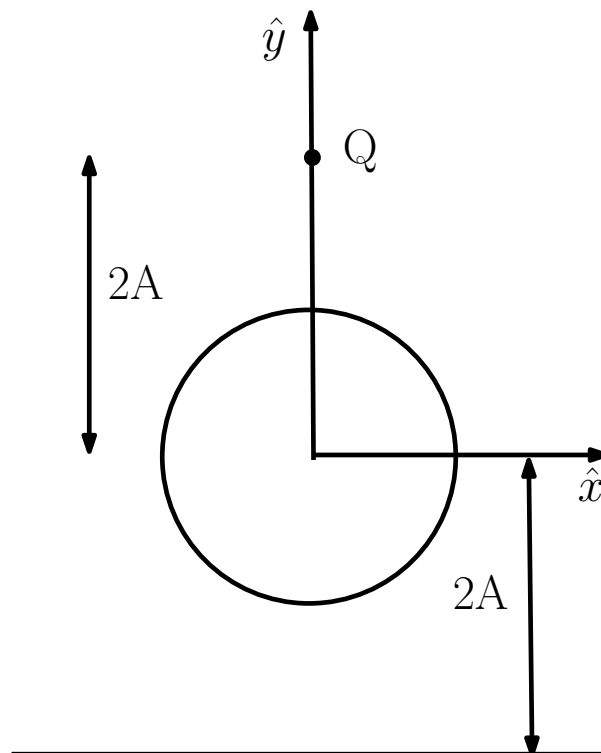
$$p(y) = p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2 d^2}{2\pi^2} \frac{1}{(y^2 + d^2)^2}. \quad (22)$$

Finalmente vale la pena notar que dado que $v^* = W'$, podemos evaluar la **ecuación (20)** en $z = iy$ obteniendo $v_x(0, y) = 0$ y $v_y(0, y) \leq 0$ coherente con el planteo físico realizado inicialmente.

Estructura de la Materia 1 – Tercera Entrega

Problema 2

i) Para la configuración de la figura nos piden el potencial complejo aproximado que verifique las condiciones de tener alguna imagen en el plano ($y < -2A$) y que el cilindro sea línea de corriente. El desarrollo a menor orden que cumpla estas premisas puede obtenerse con el potencial de la fuente real, su imagen en el plano y la imagen de estos dos términos en el cilindro haciendo uso del teorema de Milne-Thomson.



Obtenemos entonces la expresión

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(z - 2iA) + \ln(z + 6iA) + \ln\left(\frac{A^2}{z} + 2iA\right) + \ln\left(\frac{A^2}{z} - 6iA\right) \right] .$$

La forma en que construimos el potencial nos asegura por medio del teorema de Milne-Thomson que el cilindro resulta una línea de corriente. Podemos verificarlo con la evaluación $z = A e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} W(z = A e^{i\theta}) &= \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(\underbrace{A e^{i\theta} - 2iA}_{z_0}) + \ln(\underbrace{A e^{i\theta} + 6iA}_{z_1}) + \ln(\underbrace{A e^{-i\theta} + 2iA}_{z_0^*}) + \ln(\underbrace{A e^{-i\theta} - 6iA}_{z_1^*}) \right] = \\ &= \frac{Q}{2\pi} [\ln(|z_0|^2) + \ln(|z_1|^2)] \in \Re \implies \psi(z = A e^{i\theta}) = 0 . \end{aligned}$$

ii) Para lo que continúa del ejercicio vamos a reescribir el potencial complejo en una forma más

amigable

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(z - 2iA) + \ln(z + 6iA) + \ln\left(z - \frac{iA}{2}\right) + \ln\left(z + \frac{iA}{6}\right) - 2\ln(z) \right] .$$

El problema tiene simetría de reflexión respecto del eje imaginario, y es fácil darse cuenta que tanto la fuente real como todas las imágenes que van apareciendo sucesivamente a medida que desarrollamos el potencial a mayor orden están sobre el eje imaginario, en consecuencia el potencial desarrollado a cualquier orden va a satisfacer la condición $v_x = 0$ sobre todo el eje imaginario. Por lo dicho anteriormente sabemos que la solución exacta del problema exhibirá puntos de estancamiento en $z = \pm iA$ y $z = -2iA$.

La idea en este ítem entonces es verificar si en estos puntos el campo de velocidades se anula. En primer término tenemos

$$v_x - iv_y = \frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - 2iA} + \frac{1}{z + 6iA} + \frac{1}{z - iA/2} + \frac{1}{z + iA/6} - \frac{2}{z} \right) .$$

Evaluemos esto en $z = iA$

$$v_x - iv_y|_{z=iA} = \frac{Q}{2\pi} \left(-\frac{1}{iA} + \frac{1}{7iA} + \frac{2}{iA} + \frac{6}{7iA} - \frac{2}{iA} \right) = 0 .$$

Ahora en $z = -iA$

$$v_x - iv_y|_{z=-iA} = \frac{Q}{2\pi} \left(-\frac{1}{3iA} + \frac{1}{5iA} - \frac{2}{3iA} - \frac{6}{5iA} + \frac{2}{iA} \right) = 0 .$$

Por último en $z = -2iA$

$$v_x - iv_y|_{z=-2iA} = \frac{Q}{2\pi} \left(-\frac{1}{4iA} + \frac{1}{4iA} - \frac{2}{5iA} - \frac{6}{11iA} + \frac{1}{iA} \right) = \frac{-3iQ}{110\pi A} \neq 0 .$$

Obviamente, que el punto $z = -2iA$ no corresponda a un punto de estancamiento para nuestro $W(z)$ se explica por el hecho de que este potencial es una aproximación del potencial real correspondiente a la configuración planteada. Cabe mencionar que $\frac{dW}{dz}$ puede reescribirse sacando denominador común y quedando en el numerador un polinomio de cuarto grado. Algunos estudiantes, habiendo demostrado que $z = \pm iA$ eran raíces de la expresión usaron la regla de Ruffini para factorizar el numerador, lo que les permitió obtener dos nuevas raíces (en principio, posibles puntos de estancamiento), las cuales en definitiva desestimaron por caer dichos puntos dentro del cilindro. Felicito a quienes lo hicieron por su tenacidad.

iii) Usamos el teorema de Blasius para el cálculo de la fuerza

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2} \oint_C \left(\frac{1}{z - 2iA} + \frac{1}{z + 6iA} + \frac{1}{z - iA/2} + \frac{1}{z + iA/6} - \frac{2}{z} \right)^2 dz ,$$

donde nos conviene observar que los dos primeros términos corresponden a singularidades externas al cilindro y los tres restantes a internas. Sabemos que de todos los términos del desarrollo del cuadrado del potencial sólo contribuirán a la integral los términos cruzados que involucran una singularidad interna por una externa, es decir que

$$\begin{aligned}
 & \oint_C \left(\frac{1}{z-2iA} + \frac{1}{z+6iA} + \frac{1}{z-iA/2} + \frac{1}{z+iA/6} - \frac{2}{z} \right)^2 dz = \\
 & = 2 \oint_C \left(\frac{1}{z-2iA} + \frac{1}{z+6iA} \right) \left(\frac{1}{z-2iA/2} + \frac{1}{z+iA/6} - \frac{2}{z} \right) dz = 2\pi i \times 2 \times \left(\frac{1}{z-2iA} \Big|_{z=iA/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{z-2iA} \Big|_{z=-iA/6} - \frac{2}{z-2iA} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z+6iA} \Big|_{z=iA/2} + \frac{1}{z+6iA} \Big|_{z=-iA/6} - \frac{2}{z+6iA} \Big|_{z=0} \right) = \\
 & = 2\pi i \times 2 \times \left(\frac{2i}{3A} + \frac{6i}{13A} - \frac{i}{A} - \frac{2i}{13A} - \frac{6i}{35A} + \frac{i}{3A} \right) = -2\pi \times 2 \times \frac{62}{455} \implies \\
 & \implies F_x - iF_y = -\frac{i\rho}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2} \times 2\pi \times 2 \times \frac{62}{455} \implies \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = \frac{31}{455} \frac{\rho Q^2}{\pi A} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Es un resultado que debería esperarse, la fuente realiza sobre el cilindro una suerte de succión debido a que el fluido globalmente se mueve más rápido por encima del cilindro que por debajo, lo que ocasiona que la presión por debajo del cilindro sea mayor que por arriba.