Estructura de la Materia 1 – Práctica 4

La relación entre magnitudes físicas es independiente del sistema de unidades utilizado. Este postulado implica que la forma funcional de la dependencia de una dada magnitud física de determinadas variables o parámetros en un problema puede hallarse, en forma aproximativa, realizando un análisis dimensional, ya que la dependencia de dicha magnitud será a través de cantidades adimensionales que surgen de la combinación de los parámetros. Según el teorema Π, el número de parámetros adimensionales independientes (cantidad de números Π) es igual al número de variables (incluyendo la magnitud física a determinar) menos el número de dimensiones fundamentales. En hidrodinámica las dimensiones fundamentales son tres: masa, longitud y tiempo; de considerarse el tratamiento de un plasma deberán incorporarse otras dimensiones fundamentales, por ejemplo la carga eléctrica.
En síntesis, el análisis dimensional permite agrupar las variables que intervienen en un fenómeno en parámetros adimensionales y expresar el problema en términos de la relación funcional de estos parámetros.
Para agregar otros más a los múltiples ejemplos que se mostraron en la clase teórica, resolvamos algunos de los problemas de la guía.

Problema 5

Nos piden encontrar por análisis dimensional una expresión para el caudal másico Q_M en el flujo generado por un gradiente de presiones a través de un tubo de sección circular de radio a (flujo de Poiseuille). Mirando la ecuación de Navier-Stokes para este problema podemos ver que el campo de velocidades es proporcional a la inversa de la viscosidad dinámica y por lo tanto el caudal Q_M dependerá de la viscosidad cinemática ν, y no de la densidad ρ y μ en forma separada. Podemos decir entonces

$$Q_M = f(\nu, a, \mathcal{P}) \quad ,$$

siendo $\mathcal{P}$ el gradiente de presiones que produce el flujo. Tenemos entonces cuatro variables (incluyendo la magnitud a determinar) y tres magnitudes fundamentales, lo que da lugar a un único número adimensional Π. Hagamos entonces el análisis dimensional, expresemos la dimensionalidad de cada una de las magnitudes involucradas

$$[Q_M] = MT^{-1} \quad , \quad [\mathcal{P}] = ML^{-2}T^{-2} \quad , \quad [\nu] = L^2T^{-1} \quad , \quad [a] = L \quad .$$

Buscamos el único número Π

$$\left[\frac{Q_M}{\mathcal{P}^\alpha \nu^\beta a^\gamma}\right] = 1 \Longrightarrow \frac{MT^{-1}}{(ML^{-2}T^{-2})^\alpha (L^2T^{-1})^\beta L^\gamma} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} M: & \alpha & = & 1 \\ L: & -2\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \\ T: & 2\alpha + \beta & = & 1 \end{cases} \quad ,$$

obteniéndose $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 4$

$$Q_M \propto \frac{\mathcal{P}\, a^4}{\nu} \quad , \quad Q_V \propto \frac{\mathcal{P}\, a^4}{\mu} \quad .$$

Problema 6

Resolvamos el ítem **iv)**. Nos piden la cupla que realiza el fluido sobre cada cilindro, vamos a considerar la cupla por unidad de longitud, por lo que la longitud de los cilindros no va a entrar en el planteo. Sea N_1 la cupla sobre el cilindro interior, en principio puede pensarse

$$N_1 = f(a, b, \Omega_1, \Omega_2, \mu, \rho) \quad ,$$

pero viendo la forma de la ecuación de Navier-Stokes (apunte anterior) vemos que el campo de velocidades no depende ni de μ ni de ρ. Además,en la cupla que el fluido realice sobre cada cilindro lo relevante será la velocidad angular relativa entre los cilindros y no Ω_1 y Ω_2 en forma separada. Entonces podemos replantear

$$N_1 = f(a, b, \Omega_1 - \Omega_2, \mu) \quad ,$$

lo que nos da cinco variables y tres magnitudes fundamentales, lo que implicará dos números Π

$$\Pi = f(\Pi_1) \quad ,$$

donde consideramos que en la definición de Π entra la magnitud a determinar N_1, y teniendo en cuenta que dos de los parámetros tienen la misma dimensionalidad (a y b), podemos tomar $\Pi_1 = a/b$. Detrminemos entonces Π

$$[N_1] = MLT^{-2} \quad , \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1} \quad , \quad [\Omega_1 - \Omega_2] = T^{-1} \quad , \quad [a, b] = L \quad .$$

Como a y b están considerados en Π_1, no es encesario incluir los dos parámetros en la definición de Π, con sólo a basta

$$\left[\frac{N_1}{\mu^\alpha a^\beta (\Omega_1 - \Omega_2)^\gamma} \right] = 1 \quad .$$

Resolviendo obtenemos $\alpha = \gamma = 1$ y $\beta = 2$. Concluimos entonces que

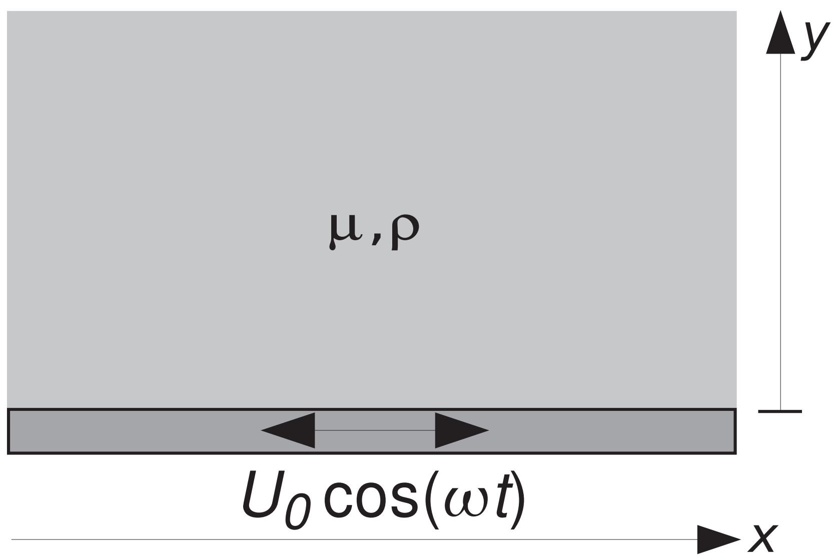
$$N_{1,2} = \mu(\Omega_1 - \Omega_2) a^2\, f(a/b) \quad .$$

Problema 10

A partir del problema 10 tenemos ejemplos de configuraciones de flujos oscilantes en régimen permanente. Se supone que el fluido está expuesto a un forzado que lo obliga a moverse en forma oscilatoria, y no nos va a interesar la existencia de un transitorio inicial si no que sólo nos ocuparemos del régimen permanente. Es por ello que nos proponen que trabajemos con una solución separable del tipo

$$\vec{v} = \Re\left\{\tilde{v}(y)\, e^{i\omega t}\right\}\hat{x} \quad .$$

donde explícitamente estamos considerando que la dependencia temporal es periódica con frecuencia ω, que es la frecuencia del forzado.



Partimos de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{v} \quad ,$$

donde el término convectivo se anula por tener un flujo de la forma $\vec{v} = v(y,t)\hat{x}$. Tomemos la coordenada $\hat{x}$ de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

pero como tenemos simetría de translación en $\hat{x}$, el término de la presión se anula. Tomando la forma funcional que nos indican para la velocidad, la componente $\hat{x}$ de Navier-Stokes queda

$$i\omega\tilde{v}\, e^{i\omega t} = \nu\frac{d^2\tilde{v}}{dt^2}\, e^{i\omega t} \Longrightarrow \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu}\right)\tilde{v} = 0 \quad ,$$

que tiene soluciones de la forma

$$\tilde{v}(y) = A\, e^{ky} + B\, e^{-ky} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\,(1+i) \equiv \frac{1+i}{\delta} \quad .$$

Con la condición de contorno $\tilde{v}(y=0) = U_0$ y pidiendo que la velocidad no diverja en $y \to \infty$ obtenemos

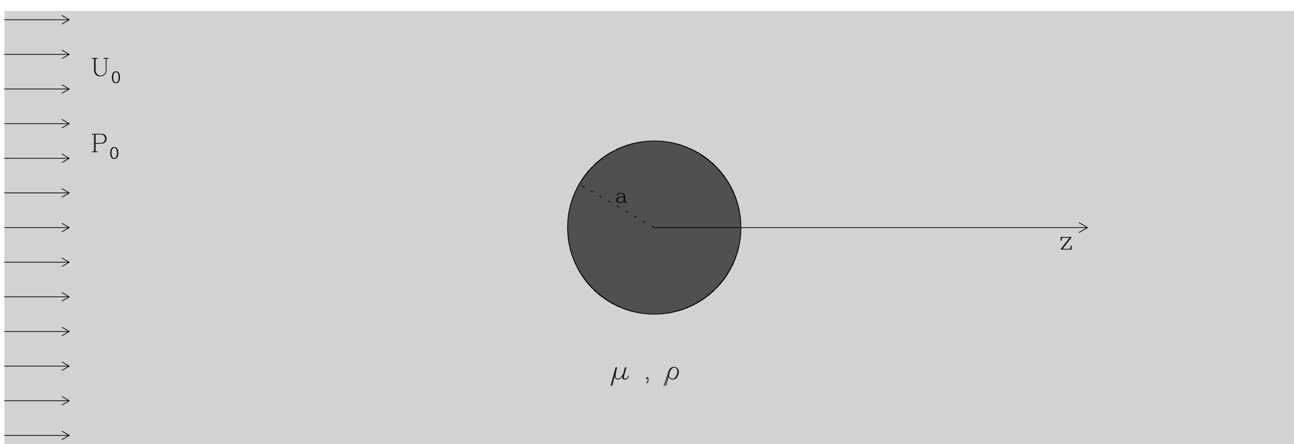
$$v(y,t) = \Re\{U_0\, e^{-(1+i)y/\delta}\, e^{i\omega t}\} = U_0 \cos(\omega t - y/\delta)\, e^{-y/\delta} \quad .$$

Vemos que el movimiento es oscilatorio pero que se encuentra desfasado, aumentando el desfasaje con la distancia al plano oscilante. δ se denomina longitud de penetración y es una longitud característica de decaimiento de la influencia del movimiento del plano en el fluido.

Fuerza de arrastre sobre una esfera

Como un ejemplo de solución de la ecuación de Navier-Stokes para flujos que no sean plano-paralelos podemos mostrar la solución de Stokes para el campo de velocidades para la configuración que se muestra en la figura, un flujo uniforme en el infinito, $\vec{v}_\infty = U\hat{z}$, con una esfera de radio a en el origen. Vemos que hay simetría de rotación respecto del eje z, por lo que el flujo debe ser axisimétrico, en coordenadas esféricas

$$\vec{v} = v_r(r,\theta)\hat{r} + v_\theta(r,\theta)\hat{\theta} \quad .$$



Consideramos el caso de bajo número de Reynolds, límite de baja velocidad y/o alta viscosidad, por lo que despreciamos el término de inercia frente al viscoso en la ecuación de Navier-Stokes

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad .$$

Recordemos que la condición de incompresibilidad impone al campo de velocidades la condición $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$, esta condición puede imponerse automáticamente introduciendo la función de corriente de Stokes $\psi(r,\theta)$, en función de la cual expresamos las componentes del campo de velocidades

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad , \quad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ,$$

que satisface la condición de incompresibilidad (verifíquelo). Podemos reescribir la ecuación de Navier-Stokes

$$\vec{\nabla} p = -\mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad ,$$

y podemos expresar el rotor del campo de velocidades como

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \psi \, \hat{\varphi} \equiv -\frac{1}{r \sin\theta} E^2 \psi \, \hat{\varphi} \quad ,$$

donde definimos el operador E^2. La ecuación de Navier Stokes en componentes esféricas nos queda

$$\left. \begin{array}{rcl} \frac{\partial p}{\partial r} & = & \frac{\mu}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E^2 \psi) \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} & = & -\frac{\mu}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} (E^2 \psi) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = E^2 (E^2 \psi) = 0 \quad ,$$

obteniéndose la última igualdad a partir de la identidad $\partial_\theta(\partial_r p) - \partial_r(\partial_\theta p) = 0$. Veamos ahora las condiciones de contorno que debe satisfacer la función de corriente. Como el campo de velocidades debe anularse sobre la superficie de la esfera

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{r=a} = 0 \quad .$$

Además tenemos la condición en el infinito

$$\lim_{r \to \infty} \vec{v}(r, \theta) = U \hat{z} = U (\cos\theta \, \hat{r} - \sin\theta \, \hat{\theta}) \quad ,$$

de lo cual obtenemos (compruébelo)

$$\lim_{r \to \infty} \psi(r, \theta) = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2\theta \Longrightarrow \psi(r, \theta) = f(r) \sin^2\theta \quad ,$$

donde $f(r)$ debe satisfacer

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0 \quad .$$

Considerando una solución de la forma $f(r) = r^\alpha$, llegamos a una ecuación indicial para la función f, $[\alpha(\alpha-1) - 2][(\alpha-2)(\alpha-3) - 2] = 0$, con soluciones $\alpha = \pm 1, 2, 4$. La solución $\alpha = 4$ debemos descartarla para evitar que el campo de velocidades diverja en el infinito, entonces

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 \quad ,$$

y las constantes A, B y C quedan definidas a partir de las condiciones de contorno para ψ, y la función de corriente es

$$\psi(r, \theta) = \frac{U}{4} \left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar \right) \sin^2\theta \quad .$$

Con la función de corriente calculada es inmediato encontrar el campo de velocidades

$$v_r = U\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right)\cos\theta \quad , \quad v_\theta = U\left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} - 1\right)\sin\theta \quad .$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la presión y el tensor de esfuerzos y con ellos la fuerza que el fluido le ejerce a la esfera. Notemos que

$$E^2\,\psi = \frac{3Ua\sin^2\theta}{2r} \Longrightarrow p(r,\theta) = p_0 - \frac{3Ua\cos\theta}{2r^2} \quad .$$

Para la fuerza que el fluido ejerce sobre la esfera tendremos

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \overline{\overline{\sigma}}\Big|_{r=a} .\hat{r}\, a^2\, \sin^2\theta\, d\theta d\varphi \quad ,$$

donde

$$\overline{\overline{\sigma}}.\hat{r} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_{rr}\hat{r} + \sigma_{\theta r}\hat{\theta} \quad .$$

Para las componentes del tensor de esfuerzos en coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}\big|_{r=a} &= \left(-p + 2\mu\tfrac{\partial v_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} &&= -p_0 + \tfrac{3\mu U\cos\theta}{2a} \\ \sigma_{\theta r}\big|_{r=a} &= \left(\mu r\tfrac{\partial v_\theta/r}{\partial r} + \tfrac{\mu}{r}\tfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\Big|_{r=a} &&= -\tfrac{3\mu U\sin\theta}{2a} \end{aligned} \quad .$$

Reemplazando estas expresiones en la integral que nos permite obtener la fuerza tendremos en definitiva

$$\vec{F} = 6\pi\mu a U\hat{z} \quad .$$