

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del segundo parcial de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación de las entregas.**
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Problema 1

a) En este problema nos piden encontrar la fuerza que el fluido ejerce sobre el cilindro completamente sumergido, fuerza que en este contexto suele denominarse empuje. Como hemos visto en reiteradas ocasiones durante el curso, esta fuerza puede calcularse como

$$\mathbf{E} = \iint_{\partial C} \sigma_{ij} n_j \, dS = - \iint_{\partial C} p \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (1)$$

donde ∂C es la superficie del cilindro, $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal externa al mismo y se incorporó el modelo de Pascal para los esfuerzos de un fluido ideal.

Vamos a necesitar, por tanto, obtener la distribución de presiones sobre la superficie del cilindro. Dado que el fluido está en reposo el balance de fuerzas dicta que

$$\mathbf{0} = -\nabla p - \rho g \hat{\mathbf{y}} \implies \nabla p = -\rho g \hat{\mathbf{y}}, \quad (2)$$

donde utilizamos el sistema de coordenadas sugerido en la figura. Integrando esta última ecuación y con la condición que $p(h) = p_0$ obtenemos

$$p(y) = p_0 - \rho g(y - h). \quad (3)$$

Llegado este punto, es necesario hacer alguna suposición sobre la presión en las tapas del cilindro. Vamos a considerar la situación en la que, o bien ambas tapas se encuentran sumergidas en el fluido, o ambas están expuestas a la atmósfera. En estos dos escenarios las contribuciones de las tapas se cancelarán mutuamente. Además, como hemos hecho en numerosas ocasiones a lo largo del curso, escribiremos la fuerza como

$$\mathbf{E} = - \iint_{\partial C} (p - p_0) \hat{\mathbf{n}} \, dS, \quad (4)$$

ya que al integrar una constante sobre una superficie cerrada se obtiene un resultado nulo. Pasando al cálculo explícito tenemos entonces

$$\mathbf{E} = \int_{\alpha}^{3\pi/2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho g (R \sin(\theta) - h) [\cos(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{y}}] \, dz R \, d\theta, \quad (5)$$

donde se utilizó la relación $y = R \sin \theta$ y se proyectó la normal $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ sobre los versores cartesianos $\hat{\mathbf{r}} = \cos(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{y}}$. Vale aclarar que es necesario proyectar la normal ya que $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta)$, es decir, el versor radial cambia con el ángulo. Calculando esta última integral mediante las relaciones trigonométricas sugeridas en el enunciado obtenemos

$$\mathbf{E} = \rho g R L \int_{\alpha}^{3\pi/2} \left\{ \left[\frac{R}{2} \sin(2\theta) - h \cos(\theta) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{R}{2} (1 - \cos(2\theta)) - h \sin(\theta) \right] \hat{\mathbf{y}} \right\} \, d\theta, \quad (6)$$

$$= \rho g R L \left\{ - \left[\frac{R}{4} \cos(2\theta) + h \sin(\theta) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{R}{2} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) + h \cos(\theta) \right] \hat{\mathbf{y}} \right\} \Bigg|_{\alpha}^{3\pi/2}, \quad (7)$$

$$= \rho g R L \left\{ - \left[\frac{R}{4} \underbrace{(-1 - \cos(2\alpha))}_{-2 \cos^2(\alpha)} + h(-1 - \sin(\alpha)) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{R}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} - h \cos(\alpha) \right) \right] \hat{\mathbf{y}} \right\}, \quad (8)$$

llegando finalmente a

$$\mathbf{E} = \rho g R L \left\{ \left[h(1 + \sin(\alpha)) + \frac{R \cos^2(\alpha)}{2} \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[R \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - h \cos(\alpha) \right] \hat{\mathbf{y}} \right\} \quad (9)$$

como se quería mostrar.

b) En este inciso nos piden encontrar alguna condición para la densidad del cilindro σ de forma tal que la situación planteada en el inciso anterior sea estable. Para esto basta solo con plantear que el cilindro se halla en reposo. El balance de fuerzas implica entonces que debe verificarse

$$\mathbf{P} + \mathbf{E} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = \mathbf{0}, \quad (10)$$

con \mathbf{P} el peso del cilindro, \mathbf{E} el empuje y \mathbf{N}_A y \mathbf{N}_B las fuerzas normales, siguiendo la nomenclatura sugerida en el enunciado. En particular, el menor peso posible para alcanzar una configuración estable estará dado cuando $\mathbf{N}_B = \mathbf{0}$, es decir, cuando el cilindro esté en contacto con el fondo del tanque pero no ejerza una fuerza sobre este. Llamaremos a este peso para el cilindro $P_{\text{crít}}$ y $\sigma_{\text{crít}}$ a la densidad asociada a este caso. Utilizando el mismo sistema de referencia que el ejercicio anterior tenemos entonces para el balance en la dirección \hat{x} ,

$$-N_A \cos(\alpha) + E_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_A = \frac{E_x}{\cos(\alpha)}, \quad (11)$$

y en la dirección \hat{y}

$$P_{\text{crít}} + E_y - N_A \sin(\alpha) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Ec. (11)}} \quad P_{\text{crít}} = E_x \tan(\alpha) - E_y, \quad (12)$$

obteniendo

$$-\sigma_{\text{crít}} \pi R^2 L g = E_x \tan(\alpha) - E_y \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{\text{crít}} = \frac{1}{\pi R^2 L g} [E_y - E_x \tan(\alpha)]. \quad (13)$$

Reemplazando por las expresiones para \mathbf{E} tenemos

$$\sigma_{\text{crít}} = \frac{1}{\pi R} \left[R \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - h \cos(\alpha) - h \left(\tan(\alpha) + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) - \frac{R \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{2} \right] \quad (14)$$

y finalmente considerando que la densidad del cilindro debe ser mayor o igual a $\sigma_{\text{crít}}$ para que la configuración sea estable llegamos a la relación

$$\sigma \geq \frac{\rho}{\pi R} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{h}{\cos(\alpha)} (1 + \sin(\alpha)) \right]. \quad (15)$$

En esta última expresión podemos notar que el primer término es siempre positivo y depende solo de R . Por otra parte, el segundo término es siempre negativo y, para α fijo, decrece monótonamente con h . Esto quiere decir que existe una profundidad h^* para la cual la densidad del cilindro deja de importar, permitiendo que un cilindro con vacío en su interior permanezca en reposo. Esto corresponde a la situación en la que el gradiente horizontal de presiones (entre la porción sumergida y expuesta del cilindro) se vuelve tan grande que la normal \mathbf{N}_A resulta suficiente para compensar la flotabilidad del cilindro, sin importar su densidad. Vale notar además que esta cantidad es también independiente de la densidad del fluido, ya que surge de balancear las dos componentes del empuje.

El enunciado no pedía obtener una expresión para h^* , sin embargo la misma se puede obtener igualando a cero la expresión para $\sigma_{\text{crít}}$ y resulta

$$h^* = \frac{R \cos(\alpha) (3\pi/2 - \alpha)}{2 (1 + \sin(\alpha))}. \quad (16)$$

Finalmente debemos notar que, aún para valores de α cercanos a $\pi/2$, la altura debe ser mayor o igual a R , de forma que el cilindro se halle completamente sumergido. Similarmente, todas las expresiones obtenidas son válidas solo si $\alpha < \pi/2$, ya que para $\alpha \geq \pi/2$ no es posible balancear la componente horizontal del empuje y, por lo tanto, el cilindro no puede hallarse en reposo.

Ejercicio 2

(a) Nos piden calcular la presión que ejercida por el émbolo de la jeringa sobre el líquido y el trabajo necesario para sacar todo el fluido, además nos piden considerar que la presión externa es nula. Una forma sencilla de relacionar la presión ejercida por el embolo con el flujo en la punta de la jeringa esa a partir de la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente que conecta el centro del émbolo con el centro de la superficie de salida,

$$\frac{p_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} = \frac{v_s^2}{2} \quad (1)$$

donde p_e es la presión en la pared del émbolo, ρ la densidad del fluido, v_e la velocidad del fluido en contacto con el embolo y v_s la velocidad del fluido en la salida de la jeringa. Para calcular la velocidad del émbolo podemos suponer que las dimensiones del volumen contenido en la jeringa son $V = A.L$, como la jeringa desagota el volumen de liquido en un tiempo t la velocidad del émbolo sera $v_e = L/t$ (donde suponemos que esta velocidad es aproximadamente constante). Para poder calcular la velocidad del fluido en la salida de la jeringa podemos utilizar conservación del caudal,

$$S.v_s = A.v_e = A.L/t = V/t,$$

$$v_s = \frac{V}{tS}. \quad (2)$$

Remplazando la ec.(2) en la ec.(1) nos queda,

$$\frac{p_e}{\rho} + \frac{L^2}{2t^2} = \frac{V^2}{2(tS)^2},$$

$$p_e = \frac{\rho L^2}{2t^2} \left(\frac{A^2}{S^2} - 1 \right).$$

Quien haya visto una jeringa común puede estimar fácilmente y a ojo que el diámetro del cuerpo es por lo menos 10 veces mas grande que el diámetro de la aguja misma. Esto lleva a una relación de superficies superior a 100:1, con lo cual a todo efecto practico se puede realizar la siguiente aproximación,

$$p_e = \frac{\rho L^2}{2t^2} \left(\frac{A^2}{S^2} - 1 \right) \approx \frac{\rho V^2}{2t^2 S^2}.$$

Para calcular el trabajo, necesitamos la velocidad del émbolo y la fuerza F . La primera ya la calculamos, para la fuerza sabemos que $F = p_e A$, con lo cual, el trabajo sera,

$$W = F.v_e = p_e A \frac{L}{t} = p_e \frac{V}{t},$$

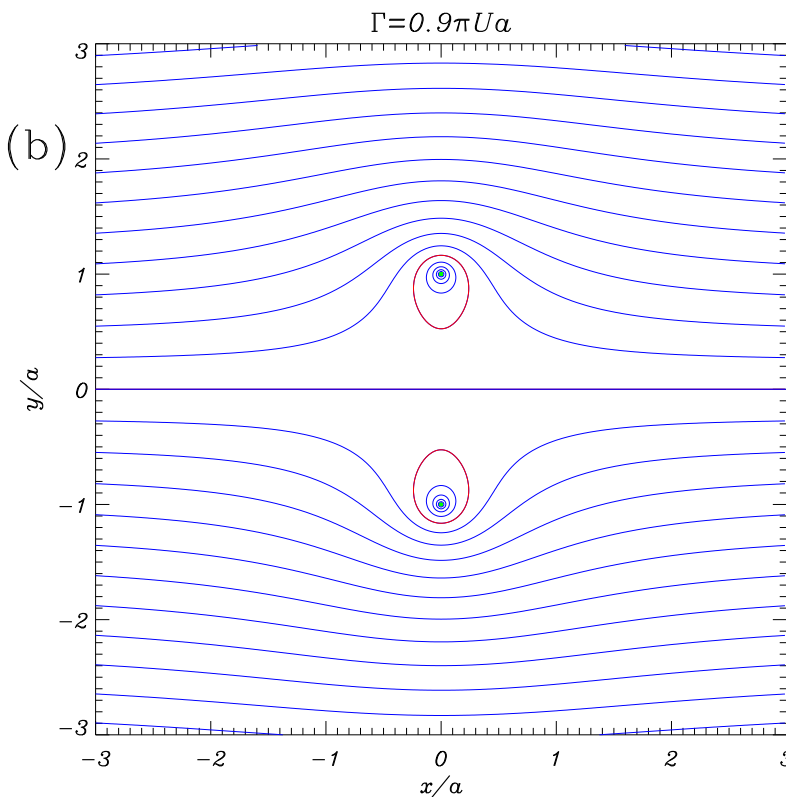
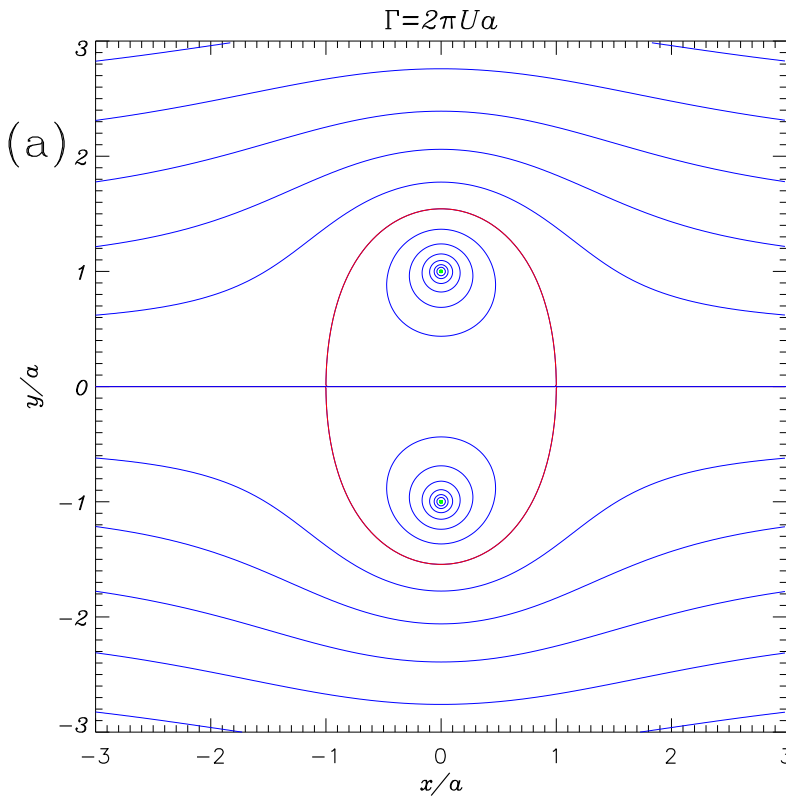
$$W = \frac{\rho V^3}{2t^3 S^2}.$$

(b) Si remplazamos los valores que nos da el ejercicio la presión ejercida por la jeringa es,

$$p = \frac{1gr/cm^3 \times (10cm^3)^2}{2 \times (10s)^2 \times (0,005cm^2)^2} = 2.000Pa,$$

Comparado con una presión atmosférica de $100.000Pa$ es mucho menor. Si consideramos la presión atmosférica en el análisis, tenderíamos que volver en la ec.(1) y agregar un termino de p_{ext} en la salida de la jeringa, pero también tendríamos que agregar este mismo termino sobre la pared del émbolo, con lo cual se terminarían cancelando. Es decir, si consideramos la presión externa llegaríamos a la misma ecuación para la presión porque la fuerza neta ejercida sobre la jeringa por la presión externa es nula.

Problema 3



Considere el flujo plano e ideal dado por una corriente uniforme en el infinito paralela al eje x , un vórtice de circulación $\Gamma > 0$ ubicado en $z = -ia$ y otro vórtice de circulación $-\Gamma$ en $z = ia$

(a) Encuentre el potencial complejo correspondiente a la configuración y muestre que el eje x es una línea de corriente.
(b) Halle los puntos de estancamiento. Muestre que se establecen dos regímenes diferentes dependiendo de la relación entre los parámetros Γ , U y a . Asocie los dos regímenes con los gráficos de líneas de corriente mostrados, donde la ubicación de los vórtices se ha indicado con círculos verdes y las curvas rojas son separatrices del flujo, es decir que el flujo dentro de la curva no se mezcla con el flujo exterior.

(c) Encuentre una expresión $x = x(y)$ para la separatriz del gráfico **(a)**, teniendo en cuenta que dicha separatriz es una línea de corriente.

(d) Suponga que en el caso del gráfico **(b)** se reemplaza la separatriz superior por un contorno sólido. Calcule la fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido. Justifique claramente su respuesta.

(a)

$$W(z) = Uz + \frac{\Gamma}{2\pi i} [\log(z + ia) - \log(z - ia)] \quad ,$$

queremos demostrar que $y = 0$ es una línea de corriente. Dado que

$$W = \phi + i\psi \quad ,$$

buscamos la parte imaginaria del potencial complejo y vemos si $\psi(x, y = 0) = \text{cte.}$

$$\psi(x, y) = Uy - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left| \frac{z + ia}{z - ia} \right| \implies \psi(x, y = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left| \frac{x + ia}{x - ia} \right| = \frac{\Gamma}{4\pi i} \log \left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 + a^2} \right) = 0 \quad .$$

(b) Para buscar los puntos de estancamiento, derivamos el potencial complejo

$$\frac{dW}{dz} = U + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{z + ia} - \frac{1}{z - ia} \right) \quad ,$$

y buscamos sus raíces

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{-2ia}{z^2 + a^2} \implies z = \pm a \sqrt{\frac{\Gamma}{U\pi a} - 1} \quad .$$

Veamos que si el argumento de la raíz cuadrada es positivo, los dos puntos de estancamiento estarán sobre el eje x , mientras que si es negativo estarán sobre el eje y . Podemos concluir que el caso $\Gamma > U\pi a$ corresponde al primer gráfico y que $\Gamma < U\pi a$ corresponde al segundo.

(c) Para hallar la curva $x(y)$ que describe la separatriz del primer gráfico tengamos en cuenta que dicha separatriz corta al eje x (línea de corriente con valor de la función corriente nulo), por lo que la línea de corriente correspondiente a la separatriz satisfará $\psi = 0$. Entonces para la separatriz se tendrá

$$Uy = \frac{\Gamma}{4\pi} \log \left[\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} \right] \implies e^{4\pi Uy/\Gamma} = \frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} \implies x = \pm \sqrt{\frac{(y + a)^2 - (y - a)^2 e^{4\pi Uy/\Gamma}}{e^{4\pi Uy/\Gamma} - 1}}$$

(d) Ahora nos dicen que en el segundo gráfico se reemplaza la separatriz en el entorno de $z = ia$ por un contorno sólido. Como el flujo no atraviesa las curvas separatrices, si no que es tangente a ellas en todo punto la presencia del sólido no altera el comportamiento del flujo exterior. Podremos calcular la fuerza que el fluido ejerce al sólido usando el teorema de Blasius sobre la curva separatriz con los flujos elementales de la configuración original, donde el vórtice con circulación $-\Gamma$ será la única singularidad interna. Usando Blasius entonces

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left[U + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{z + ia} - \frac{1}{z - ia} \right) \right]^2 dz = i\rho \oint \left[-\frac{U\Gamma}{2\pi i(z - ia)} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right)^2 \frac{1}{z + ia} \frac{1}{z - ia} \right] dz \quad .$$

Ahora no queda más que calcular los residuos

$$\oint -\frac{U\Gamma}{2\pi i(z - ia)} dz = -\frac{U\Gamma}{2\pi i} 2\pi i = -U\Gamma \quad ,$$

$$\oint -\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right)^2 \frac{1}{z + ia} \frac{1}{z - ia} dz = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \right)^2 2\pi i \frac{1}{z + ia} \Big|_{z=ia} = -\frac{\Gamma^2}{2\pi i} \frac{1}{2ia} \quad .$$

Con estos resultados tenemos en definitiva

$$F_x - iF_y = i\rho \left(-U\Gamma + \frac{\Gamma^2}{4\pi a} \right) \implies \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = \rho\Gamma \left(U - \frac{\Gamma}{4\pi a} \right) \end{cases} .$$