

## Estructura de la Materia 1 – Práctica 6

En esta guía estudiamos las ondas que se generan en la superficie libre de un fluido o en la interfase entre dos fluidos no miscibles, donde la fuerza restitutiva está dada por un campo gravitatorio uniforme. La interfase aire-líquido o entre dos líquidos no miscibles es plana, vamos a considerar las ondas de baja amplitud que se generan ante una perturbación externa que se manifiestan ostensiblemente en la interfase, pero que en rigor de verdad se extienden a todo el fluido. Siendo un fenómeno dependiente del tiempo, el balance entre fuerzas generadoras de movimiento es el debido a una competencia entre el gradiente de presiones y la gravedad. Entonces si  $a$  es la amplitud de la onda y  $\lambda$  su longitud característica, el límite de baja amplitud corresponde a  $a \ll \lambda$ . Tenemos la ecuación de Euler, es decir la ecuación de evolución de un fluido ideal

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \quad .$$

Veamos que los dos términos que involucran a la velocidad son de diferente orden en el caso que estamos considerando. Por un lado tenemos que la velocidad típica será  $U \sim a/\tau$ , siendo  $\tau$  el período de oscilación de la perturbación, mientras que la longitud típica en la que se produce variación en la velocidad de los elementos de fluido es  $\lambda$ , la longitud de onda de la perturbación. De lo dicho se desprende que

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{U}{\tau} \sim \frac{a}{\tau^2} \quad , \quad |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}| \sim U \frac{U}{\lambda} \sim \frac{a^2}{\lambda \tau^2} \implies \left| \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} \right| \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad ,$$

por lo que podemos desprestigiar el término convectivo. Vemos además que si consideramos incompresibilidad la ecuación de Euler nos dice que si el flujo es inicialmente irrotacional continuará siéndolo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) \quad ,$$

donde tomamos el eje  $z$  en dirección de la vertical. Según el teorema de Bernoulli para fluidos irrotacionales

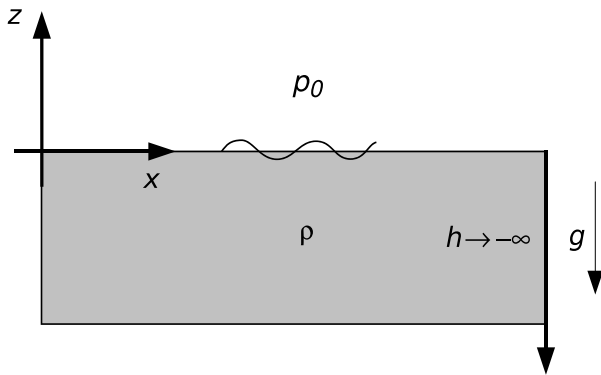
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C(t) \quad ,$$

siendo  $\phi$  el potencial de velocidades. Por un lado  $C(t)$  puede absorberse dentro del potencial  $\phi$  sin afectar la dinámica del fluido, y por otro veamos que el término con  $v^2$  puede desprestigiar frente a  $\partial_t \phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \sim \frac{\lambda U}{\tau} \sim \frac{a \lambda}{\tau^2} \quad , \quad v^2 \sim U^2 \sim \frac{a^2}{\tau^2} \implies \frac{v^2}{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad .$$

Entonces el teorema de Bernoulli adopta la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad .$$



Consideremos el caso de un fluido en contacto con aire a presión  $p_0$ , y sea  $z = \zeta(x, t)$  la interfase entre el fluido y el aire (consideramos simetría de translación en  $\hat{y}$ ), según Bernoulli tendremos

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad ,$$

y podemos incorporar la constante  $p_0/\rho$  en el potencial de forma tal que obtenemos para la forma de la interfase

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} \quad ,$$

donde debemos notar que esta es una ecuación implícita para  $\zeta(x, t)$  que no nos permitiría calcularla aún conociendo la forma de  $\phi$ . Si queremos continuar con un tratamiento analítico, aproximamos la evaluación del término derecho tomando  $\partial_t \phi|_{z=0}$ , por lo que se obtiene para la interfase

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} \quad .$$

Ahora concentrémosnos en el potencial de velocidades, a partir de la incompresibilidad del fluido

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \implies \nabla^2 \phi = 0 \quad ,$$

vemos que el potencial satisface la ecuación de Laplace. Ahora traducimos a una condición exclusivamente sobre el potencial la condición que obtuvimos para la interfase, derivándola respecto del tiempo

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} = 0 \quad ,$$

y considerando que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = v_z|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \zeta \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad ,$$

donde usamos en el último paso que  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \zeta / \partial_t \zeta \sim a/\lambda \ll 1$ , llegamos a

$$\left( g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad .$$

Esta última es la condición de contorno que debe cumplir el potencial de velocidades en la interfase líquido-aire.

## Problema 4

En este ejercicio tenemos dos fluidos no miscibles en contacto, el fluido superior tiene densidad  $\rho'$  y profundidad  $h'$  y está en contacto con la atmósfera. El fluido inferior tiene densidad  $\rho$  y profundidad  $h$  (que eventualmente puede ser infinita). Para cada fluido vamos a tener sendos potenciales  $\phi'$  y  $\phi$  y elegimos que la interfase entre los mismos corresponda a  $z = 0$ .

i) Cada uno de los fluidos es incompresible e irrotacional, por lo que sus potenciales de velocidad satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi' = 0 \quad , \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad .$$

Para el fluido superior en contacto con la atmósfera debe cumplirse la condición de contorno que ya dedujimos, con la única salvedad de que ahora la interfase está en  $z = h'$  en lugar de en  $z = 0$ , por lo que tendremos

$$\left( g \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right)_{z=h'} = 0 \quad .$$

En la interfase entre los dos líquidos podemos también plantear la continuidad de la presión usando el teorema de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \implies p = -\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) \quad ,$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{p}{\rho'} + gz = 0 \implies p = -\rho' \left( \frac{\partial \phi'}{\partial t} + gz \right) \quad ,$$

por lo que planteando la igualdad de presiones en la interfase nos da

$$\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) \Big|_{z=\zeta} = \rho' \left( \frac{\partial \phi'}{\partial t} + gz \right) \Big|_{z=\zeta} \quad .$$

Derivando esta última expresión respecto del tiempo, aproximando  $\partial_t \zeta \approx v_z|_{z=\zeta} = \partial_z \phi|_{z=\zeta} = \partial_z \phi'|_{z=\zeta}$ , donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la continuidad de la componente vertical de la velocidad en la interfase, llegamos a la condición

$$\left[ g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=\zeta} \quad ,$$

y en un último paso aproximamos la evaluación en la interfase por la evaluación en  $z = 0$

$$\left[ g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=0} \quad .$$

ii) Supongamos que  $h$  es finito, por lo que en  $z = -h$  tenemos un contorno sólido, en ese caso debemos

pedir que la componente vertical de la velocidad se anule, es decir

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad .$$

Por el contrario, si  $h \rightarrow \infty$  la condición a pedir será

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = 0 \quad .$$

iii) La condición para la interfase aire-líquido que ahora denominamos  $z = \eta(x, t)$  la obtuvimos anteriormente cuando esa interfase estaba alrededor de  $z = 0$ , sólo que ahora se ubica en  $z = h'$

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right|_{z=h'} \quad .$$

La interfase líquido-líquido que llamamos  $z = \zeta(x, t)$  la podemos obtener de la relación correspondiente a la igualdad de presiones en la interfase, simplemente despejando  $\zeta(x, t)$  de esa expresión

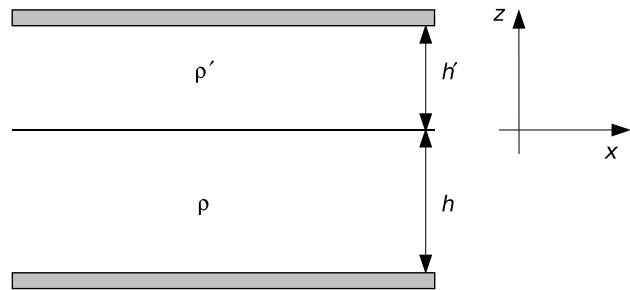
$$\zeta(x, t) = -\frac{1}{g(\rho - \rho')} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} \quad .$$

## Problema 5

i) Nos piden la relación de dispersión para las ondas de gravedad que se propagan en la interfase entre los dos fluidos con la configuración de la figura. Proponemos para  $\phi$  y  $\phi'$  la forma

$$\phi(x, z, t) = f(z) \cos(kx - \omega t) \quad ,$$

$$\phi'(x, z, t) = g(z) \cos(kx - \omega t) \quad .$$



Para que se satisfaga la ecuación de Laplace  $f(z)$  y  $g(z)$  deben ser de la forma

$$f(z) = A e^{-kz} + B e^{kz} \quad , \quad g(z) = C e^{-kz} + D e^{kz}$$

Para que se cumplan las condiciones de contorno de que  $v_z$  sea nula en  $h'$  y en  $-h$  directamente planteamos

$$f(z) = A \cosh[k(z + h)] \quad , \quad g(z) = C \cosh[k(z - h')] \quad .$$

También deben verificarse las condiciones de empalme

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right|_{z=0} \implies A \sinh(kh) = C \sinh(-kh') \quad ,$$

$$\left[ g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=0} = 0 \implies g(\rho - \rho') A k \sinh(kh) - \rho \omega^2 A \cosh(kh) + \rho' \omega^2 C \cosh(kh') = 0$$

Buscamos la relación de dispersión pidiendo que el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones se anule

$$\begin{vmatrix} \sinh(kh) & \sinh(kh') \\ g(\rho - \rho') k \sinh(kh) - \rho \omega^2 \cosh(kh) & \rho' \omega^2 \cosh(kh') \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

de lo cual se obtiene

$$\omega^2 = \frac{gk(\rho - \rho')}{\rho \cotgh(kh) + \rho' \cotgh(kh')} \quad ,$$

que en general corresponde a ondas dispersivas.

ii) Consideramos el caso  $kh, kh' \gg 1$ , tendremos que

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \cotgh(kh) = 1 \quad , \quad \lim_{kh' \rightarrow \infty} \cotgh(kh') = 1 \quad ,$$

de forma tal que

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} \quad ,$$

que si bien es una expresión más simple que la que teníamos sigue dando ondas dispesivas.

iii) Ahora tenemos el otro límite,  $kh, kh' \ll 1$ , el denominado límite de ondas largas, en este caso  $\cotg(kh') \approx kh'$  por lo que resulta para  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{k^2 g(\rho - \rho') h h'}{h' \rho + h \rho'} ,$$

que corresponde a ondas no dispersivas.