$$\delta b = b(\bar{x} + \delta\bar{x}, t + \delta t) - b(\bar{x}, t) =$$

$$\frac{\partial b}{\partial t}\delta t + \underbrace{\frac{\partial b}{\partial x_i}\delta x_i}_{\frac{\partial b}{\partial x}\delta x + \frac{\partial b}{\partial y}\delta y + \frac{\partial b}{\partial z}\delta z}$$

$$\delta x = u_x \delta t \qquad \delta y = u_y \delta t \qquad \delta z = u_z \delta t$$

$$\delta b = \frac{\partial b}{\partial t}\delta t + \frac{\partial b}{\partial x_i} u_i \delta t$$

$$\boxed{\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla})\bar{b}}$$ Derivada material

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta b}{\delta t} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i}\bar{u}_i \qquad \frac{Db}{Dt}$$

$$\frac{db}{dt}$$

- Explicitar objeto de estudio
- Hipótesis del continuo
- Representaciones $\begin{cases}\text{Lagrangiana} \\ \text{Euleriana} \rightarrow \text{Derivada material.}\end{cases}$

- Diferentes visualizaciones de los fluidos:
  - Líneas de corriente (streamlines)
  - Trayectorias
  - Líneas de traza (streaklines)

- **Líneas de corriente:**

Están definidas en un instante fijo t, y son las líneas que en todo punto son tangentes al campo de velocidades.

$$d\bar{l} = \epsilon\,\bar{u} \Rightarrow \begin{cases} dx = \epsilon u_x \\ dy = \epsilon u_y \\ dz = \epsilon u_z \end{cases}$$

$\downarrow$

diferencial de líneas de corriente

$$\boxed{\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}}$$

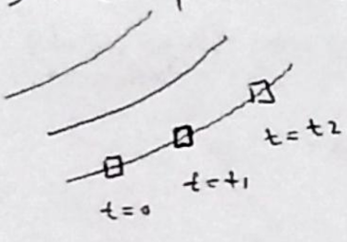
Las líneas de corriente dan una representación instantánea del fluido.

- **Trayectoria:** $\underline{\bar{x}(t, \bar{x}_0)}$ → Lagrangiana → trayectoria del elemento de fluido que en $t=0$ estaba en $\bar{x}_0$

son las sucesivas posiciones que ocupa un elemento de fluido cuando transcurre un lapso de tiempo

No es una descripción instantánea, sino que da información de la evolución del fluido.

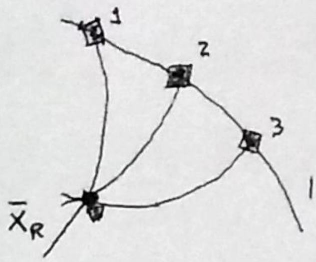
Descripción Euleriana: $\bar{u}(\bar{x}, t) = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial t}$ → deberá integrarse.



- **Líneas de traza:**

Están asociadas a un punto de referencia $\bar{x}_R$ en un dado instante t. Van a estar dadas por la posición de los elementos de fluido en el instante t que en algún instante anterior pasaron por el punto de referencia.

$0 \leq t' \leq t$



líneas de traza.

Con descripción Lagrangiana

$\bar{X}_0(t', \bar{X}_R)$

$\downarrow$

la posición del elemento de fluido que a tiempo t' pasó por $\bar{X}_R$

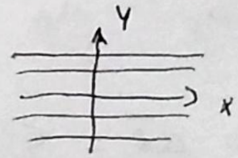
$\Rightarrow$ la línea de traza va a estar dada por $\bar{X}(t, \bar{X}_0(t', \bar{X}_R))$ con $0 \leq t' \leq t$

Para determinar $\bar{X}_0(t', \bar{X}_R)$ antes invertimos la relación $\underline{\bar{X}_R = \bar{X}(t', \bar{X}_0)}$

Las tres visualizaciones coinciden en el caso de un fluido estacionario.

Problema 3:

(x_0, y_0)



i) Corriente uniforme $\bar{u} = U\hat{x}$

• Líneas de corriente:

$\underline{\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y}}$ voy a pedir para que esto tenga sentido: $dy = 0$

$\boxed{y = y_0} \rightarrow$ líneas de corriente.

$\underline{d\bar{l} = \epsilon\, \bar{u}} \Rightarrow d\bar{l} = dx\,\hat{x} = \epsilon U \hat{x}$

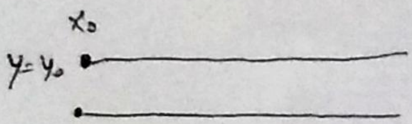
$\underline{dy = 0}$

• Trayectoria:

$\dfrac{d\bar{x}}{dt} = U\hat{x} \rightarrow \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{dX}{dt} = U \qquad \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t U\,dt$

$x - x_0 = Ut \rightarrow \underline{x = x_0 + Ut}$

$\underline{y = y_0}$



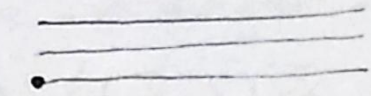
Líneas de traza:

Punto de referencia (x_R, y_R) $\longrightarrow$ punto fijo

$$x_R = x_0 + Ut' \Rightarrow x_0 = x_R - Ut'$$

$$x = x_0 + Ut = x_R + U(t-t') \qquad 0 \leq t' \leq t$$

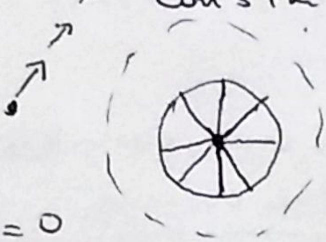
$$y_0 = y_R$$



(x_R, y_R)

ii) $\bar{u}(r,\theta) = \dfrac{Q}{2\pi r}\,\hat{r}$ fuente lineal de caudal constante.

- Líneas de corriente



$$Q = \int \bar{u} \cdot d\bar{s}$$

$$\frac{V}{t}$$

r, θ

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{r\,d\theta}{u_\theta} \qquad u_\theta = 0 \qquad u_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

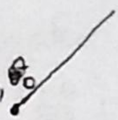
$$d\bar{l} = \epsilon\,\bar{u} = \epsilon \frac{Q}{2\pi r}\,\hat{r} \Rightarrow dl = dr$$

$$d\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0$$

- Trayectoria:

$d\theta = 0$ $\quad \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{Q}{2\pi r} \rightarrow \displaystyle\int_{r_0}^{r} r\,dr = \frac{Q}{2\pi}\int_0^t dt$

$\theta = \theta_0$ $\qquad (r_0, \theta_0)$



r_0, θ_0

$$\boxed{r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{Q}{\pi}t} \qquad \theta = \theta_0}$$

- Líneas de traza:

$\bar{x}_R = (\bar{r}_R, \theta_R)$ $\qquad r_0 = r_0(r_R, t') \Rightarrow \sqrt{r_0^2 + \dfrac{Q}{\pi}t'} = r_R$

$$r = \sqrt{r_R^2 + \frac{Q}{\pi}(t-t')} \qquad 0 \leq t' \leq t$$

$$\theta = \theta_R$$

x_R, θ_R

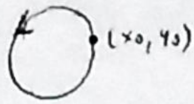
iii) Torbellino de circulación constante

$$\bar{u}(r,\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\,\hat{\theta} \qquad \hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{-\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)} \\ u_y = \dfrac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)} \end{cases}$$



- Líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \rightarrow \int_{x_0}^{x} x\,dx = \int_{y_0}^{y} -y\,dy$$

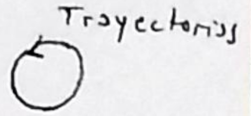
$$x^2 - x_0^2 = -(y^2 - y_0^2) \rightarrow x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2$$

Círculo de radio $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

- Trayectorias:

$$u_r = 0 \rightarrow r = r_0$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \rightarrow \theta = \theta_0 + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\,t$$



- Líneas de traza:

$$r = r_R$$

$$\theta = \theta_R + \frac{\Gamma}{2\pi r_R}(t - t')$$