Estructura de la Materia 1 – Guía 0

Problema 1-I)

En este ejercicio nos proponen demostrar la isotropía del pseudotensor de Levi-Civita. Vamos a encarar una demostración en la que usaremos algunas de las identidades que se obtienen en los ítems posteriores. Por un lado sabemos que podemos expresar el determinante de una matriz usando el tensor de Levi-Civita, en particular para una matriz C

$$\det(C) = \epsilon_{ijk} c_{1i} c_{2j} c_{3k} \quad ,$$

y a partir de esto es inmediato plantear la siguiente identidad

$$\det(C)\,\epsilon_{pqr} = \epsilon_{ijk} c_{1i} c_{2j} c_{3k}\,\epsilon_{pqr} \quad .$$

Por otro lado obtuvimos en el ítem **III)** del mismo problema la siguiente identidad

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad ,$$

entonces podemos escribir

$$\det(C)\,\epsilon_{pqr} = \left[\delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}) - \delta_{iq}(\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kp}) + \delta_{ir}(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})\right] c_{1i} c_{2j} c_{3k} =$$

$$= c_{1p}c_{2q}c_{3r} + c_{1q}c_{2r}c_{3p} + c_{1r}c_{2p}c_{3q} - c_{1p}c_{2r}c_{3q} - c_{1q}c_{2p}c_{3r} - c_{1r}c_{2q}c_{3p} =$$

$$= c_{1p}(\epsilon_{1jk}c_{jq}c_{kr}) + c_{2p}(\epsilon_{2jk}c_{jq}c_{kr}) + c_{3p}(\epsilon_{3jk}c_{jq}c_{kr}) = \epsilon_{ijk}c_{ip}c_{jq}c_{kr} \quad .$$

Por ser el Levi-Civita un pseudotensor, su regla de transformación es

$$\epsilon'_{pqr} = \det(C)\,\underbrace{c_{ip}c_{jq}c_{kr}\epsilon_{ijk}}_{\det(C)\,\epsilon_{pqr}} = [\det(C)]^2\,\epsilon_{pqr} \quad ,$$

y considerando que C es una matriz de transformación con origen fijo (rotación o reflexión) se tiene que $\det(C) = \pm 1$, y en definitiva

$$\epsilon'_{pqr} = \epsilon_{pqr} \quad .$$