Resolución primer parcial

Estructura de la Materia 1 - Segundo semestre de 2020

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del primer parcial de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación de las entregas**.
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Ejercicio 1

(a) Para calcular la trayectoria del elemento de fluido que se encuentra en la posición (x_0, y_0) a $t = 0$ solo debemos integrar la velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t) = \alpha X\hat{x} - \alpha Y\hat{y} \equiv \alpha x\hat{x} - \alpha y\hat{y}$ con los limites de integración correspondientes,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \alpha \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{x}{x_0} = \alpha t \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{\alpha t}, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\alpha \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{y}{y_0} = -\alpha t \quad \Rightarrow \quad y = y_0 e^{-\alpha t}. \tag{2}$$

Para calcular las lineas de corriente partimos de $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, que nos conduce a la siguiente expresión,

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{-\alpha y} \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{x}{x_0} = \ln\frac{y_0}{y} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x_0 y_0}{x}$$

(b) Ahora nos piden calcular la densidad $\rho(x, y, t)$ sabiendo que a $t = 0$ la distribución de densidades del fluido es $\rho_0(x, y) = \lambda x^2 y$. Además, como la función densidad es separable en su parte espacial y temporal podemos considerar $\rho(x, y, t) = \rho_0(x, y)f(t)$. Notar que la parte espacial esta dada por $\rho_0(x, y)$, ya que la evolución temporal esta dada por $f(t)$ la parte espacial no podría ser distinta para $t > 0$. Notemos ademas que la divergencia del campo de velocidades es nula,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{d(\alpha x)}{dx} - \frac{d(\alpha y)}{dy} = \alpha - \alpha = 0,$$

con lo cual el flujo resulta incompresible. Esto nos lleva a la siguiente expresión,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\rho = 0, \tag{3}$$

Remplazando $\rho(x, y, t) = \rho_0(x, y)f(t)$ en la ec.(3) obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0(x, y)f(t) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\rho_0(x, y)f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x^2 y \frac{\partial f(t)}{\partial t} + f(t)(\alpha x\partial x - \alpha y\partial y)\lambda x^2 y = 0,$$

$$\lambda x^2 y \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \lambda x^2 y\alpha f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(t)}{\partial t} + \alpha f(t) = 0.$$

Con lo cual, la solución a la ecuación diferencial viene dada por $f(t) = Ce^{-\alpha t}$. Además, como $\rho(x, y, 0) = \rho_0(x, y)$ la constante es $C = 1$. La expresión para la distribución de densidad del fluido resulta,

$$\rho(x, y, t) = \lambda x^2 y \, e^{-\alpha t} \tag{4}$$

(c) A $t = 0$ el elemento de fluido se encuentra en (x_0, y_0), podemos calcular su posición a $t = t_1$ ya que conocemos su trayectoria (ec.(1,2)). Si remplazamos su posición en la ec.(4) obtendremos la densidad del elemento de fluido a $t = t_1$,

$$\rho(x(t_1), y(t_1), t_1) = \lambda {x_0}^2 y_0 \, e^{2\alpha t_1} \, e^{-\alpha t_1} \, e^{-\alpha t_1} = \lambda {x_0}^2 y_0$$

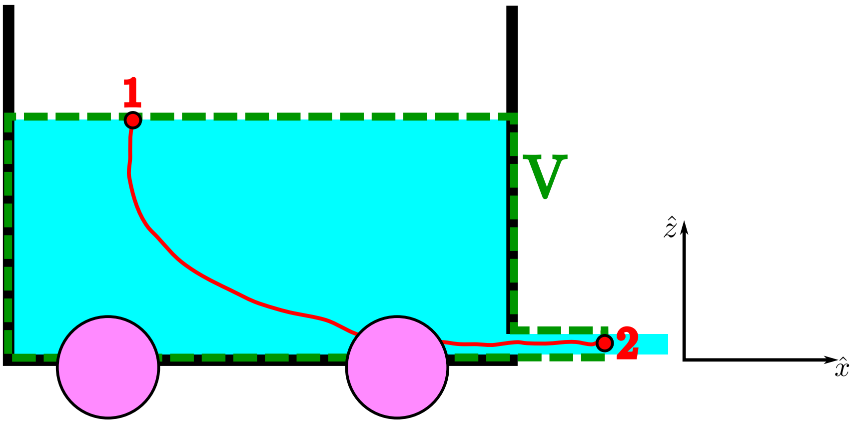
Que resulta ser la densidad del elemento de flujo en la posición (x_0, y_0) a $t = 0$. Como el flujo es incompresible la densidad del elemento de fluido se mantiene constante.

(d) Para encontrar la presión partiremos de la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} + \boldsymbol{F}^M$$

Tenemos que $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$. Además, $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = (\alpha x\partial_x - \alpha y\partial_y)(\alpha x\hat{x} - \alpha y\hat{y}) = \alpha^2(x\hat{x} + y\hat{y}) = \alpha^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^M$. Con lo cual resulta $\boldsymbol{\nabla} p = 0$, y se desprende que la distribución de presión viene dada por la constante p_0.

Problema 2



a) En este ejercicio nos piden analizar el desagote lento de un tanque montado sobre un móvil. Dado que el mismo móvil se mueve a velocidad constante resulta conveniente estudiar el problema desde un referencial solidario al móvil con origen en la base del depósito. Dado que nos piden considerar el desagote en régimen cuasiestacionario, podemos utilizar el siguiente teorema de Bernoulli para flujos estacionarios y barotrópicos

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \qquad \text{con 1 y 2 sobre la misma línea de corriente,} \tag{1}$$

donde por desarrollarse el flujo a densidad constante el término $\int dp/\rho$ se reduce p/ρ. Tomando una línea de corriente que conecte un punto sobre la superficie libre con otro en el jet de fluido expulsado (esa línea de corriente existe, trivialmente) se tiene

$$\frac{v_L^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{v_s^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}, \tag{2}$$

con v_L la velocidad del fluido sobre la superficie libre y p_0 la presión atmosférica, ya que se considera que el punto 2 está a una distancia del orificio tal que el flujo allí es aproximadamente uniforme y se halla, por tanto, a presión atmosférica. Asimismo v_L será igual a la variación temporal de la altura de fluido en el depósito $\dot{h}$. Utilizando además la conservación de masa se debe cumplir

$$\rho v_L A = \rho v_s A_s \qquad \Longrightarrow \qquad v_s = \frac{A_s}{A}\dot{h}, \tag{3}$$

y se obtiene finalmente la ecuación diferencial para $h(t)$

$$\dot{h}^2 = \frac{2g}{\frac{A^2}{A_s^2} - 1} h \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{h} = -A_s\sqrt{\frac{2g}{A^2 - A_s^2}}\sqrt{h}, \tag{4}$$

donde se consideró el signo negativo al despejar el cuadrado ya que la altura de fluido debe ir necesariamente disminuyendo. Integrando a ambos lados se obtiene finalmente

$$\int_{h_0}^{h} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -A_s\sqrt{\frac{2g}{A^2 - A_s^2}}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - A_s\sqrt{\frac{2g}{A^2 - A_s^2}}\,t\right)^2.} \tag{5}$$

Vale notar que se consideró igualmente correcta la aproximación $v_L^2 = 0$ en la ecuación de Bernoulli, ya que de la relación de caudales se requiere $v_L = v_s A_s/A$ y dado que $A_s/A \ll 1$ se concluye entonces $v_L^2 \approx 0$. En ese caso notar que se obtiene $v_s = \sqrt{2gh}$ y luego debe verificarse la conservación de masa $\dot{h}A = v_s A_s$, que da lugar una ecuación diferencial análoga a la ecuación (4).

b) Dado que el móvil se desplaza a velocidad constante en el sentido $-\hat{\boldsymbol{x}}$ se concluye debe estar actuando sobre el depósito una fuerza $\boldsymbol{F}$ con el mismo sentido y una fuerza de roce que se oponga a esta última $\boldsymbol{F}_r = -\boldsymbol{F}$. Dado que la situación puede considerarse cuasiestacionaria el teorema de conservación de momento se reduce a

$$\int_{\partial V} \left[\rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) + p\hat{\boldsymbol{n}} + \psi\hat{\boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d}S = \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

con ψ el potencial gravitatorio y V el volumen de control mostrado en verde en la figura. Si se considera ahora la componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ de esta conservación se tiene

$$\int_{\partial V} \left[\rho v_x(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) + p n_x + \psi n_x\right] \mathrm{d}S = 0. \tag{7}$$

La integral que involucra a $\boldsymbol{v}$ se reduce a integrar solo sobre el segmento vertical que pasa por 2, puesto que en la superficie libre $v_x = 0$ y el resto del contorno está conformado por líneas de corriente (y por tanto $\boldsymbol{v} \perp \hat{\boldsymbol{n}}$. Por otra parte, la cantidad $\int_{\partial V} \psi n_x \,\mathrm{d}S$ se reduce a integrar sobre las superficies laterales del depósito (donde $n_x \neq 0$) y dado que ψ depende solo de z las integrales sobre cada lateral se cancelan mutuamente. Adicionalmente, $\int_{\partial V} p n_x \,\mathrm{d}S$ representa la componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ de la fuerza que el depósito ejerce sobre el fluido. Se tiene entonces la relación

$$F_x = -\int_{\partial V} \rho v_x(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) = -\rho v_s^2 A_s, \tag{8}$$

con v_s la velocidad con la que sale el flujo por el orificio. Finalmente considerando que la fuerza de roce es opuesta a F_x y utilizando las ecuaciones (3) y (4) para expresar v_s^2 en términos de h y las constantes del problema, se llega a

$$\boxed{\boldsymbol{F}_r = \frac{2\rho g A_s^5}{A^2(A^2 - A_s^2)} \left(\sqrt{h_0} - A_s\sqrt{\frac{2g}{A^2 - A_s^2}}t\right)^2 \hat{\boldsymbol{x}}.} \tag{9}$$

Vale aclarar que se consideró parcialmente correcta la respuesta que suponía para la fuerza de roce una dependencia de la forma $|\boldsymbol{F}_r| = \mu_d|\boldsymbol{N}|$, con μ_d el coeficiente de rozamiento dinámico y $\boldsymbol{N}$ la fuerza normal al suelo, que depende del tiempo.

Problema 3

a) En este ítem nos dan la función de corriente $\psi(x,y)$ y nos piden que encontremos el potencial complejo $W(z)$ correspondiente. Como en casi todos los problemas de flujos potenciales planos, la forma de resolver el problema no es única, podemos elegir vincular las derivadas de la función de corriente y del potencial complejo

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial\psi}{\partial y} & = & v_x \\ \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & = & -v_y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad .$$

Por lo tanto

$$\frac{dW}{dz} = C\left\{\frac{2(x-d)y}{[(x-d)^2+y^2]^2} - \frac{i}{(x-d)^2+y^2} + \frac{2i(x-d)^2}{[(x-d)^2+y^2]^2}\right\} = C\left\{\frac{2(x-d)y + i[(x-d)^2-y^2]}{[(x-d)^2+y^2]^2}\right\} \quad .$$

Notemos que el denominador puede escribirse como $|z-d|^4 = (z-d)^2[(z-d)^*]^2$ mientras que para el numerador tenemos $2(x-d)y + i[(x-d)^2-y^2] = i[(x-d)^2-y^2-2i(x-d)y] = i[(z-d)^*]^2$. Entonces en definitiva

$$\frac{dW}{dz} = iC\frac{[(z-d)^*]^2}{(z-d)^2[(z-d)^*]^2} = \frac{iC}{(z-d)^2} \quad .$$

Consecuentemente para el potencial complejo tenemos

$$W(z) = -\frac{iC}{z-d} \quad ,$$

que tiene la forma del potencial de un dipolo.
Otra forma más sencilla de resolverlo era darse cuenta de antemano que el potencial era de la forma de un dipolo, notando que $\lim_{r\to\infty}\psi(r,\theta) = r^{-1}$. Entonces planteamos directamente que $W(z)$ debe ser de la forma (considerando dipolo fuente - sumidero, por ejemplo)

$$W(z) = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z-z_0)} = -\frac{\mu e^{i\alpha}(z-z_0)^*}{2\pi|z-z_0|^2} = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)[(x-x_0)-i(y-y_0)]}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad .$$

De la última expresión y tomando la definición de $\psi(x,y)$, es inmediata la identificación

$$C = \frac{\mu}{2\pi} \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x_0 = d \quad , \quad y_0 = 0 \quad .$$

b) Al introducir un cilindro en el origen, para que se verifiquen las nuevas condiciones de contorno debemos hacer uso del teorem del círculo, resultando el nuevo potencial

$$W(z) = -\frac{iC}{z-d} + \frac{iC}{a^2/z-d} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z) \quad ,$$

donde el segundo término es el resultado de aplicar el teorema del círculo y el tercero corresponde a la circulación atrapada.
En mi caso, prefiero escribir el segundo término en otra forma

$$\frac{iC}{a^2/z-d} = -\frac{iC}{d}\left(\frac{z}{z-a^2/d}\right) = -\frac{iC}{d}\left(\frac{z-a^2/d+a^2/d}{z-a^2/d}\right) = -\frac{iC}{d}\left(1+\frac{a^2/d}{z-a^2/d}\right) \quad .$$

Usando que $a = d/2$ y desestimando el término constante de la expresión anterior, el potencial queda

$$W(z) = -\frac{iC}{z-d} - \frac{iC}{4(z-d/4)} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z) \quad .$$

c) Ahora nos piden calcular la fuerza sobre el cilindro, todo se reduce a aplicar el teorema de Blasius

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_{|z|=a}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \quad .$$

Con el potencial calculado en el ítem anterior tenemos

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_{|z|=a}\left[\frac{iC}{(z-d)^2} + \frac{iC}{4(z-d/4)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z}\right]^2 dz \quad .$$

El primer término es una singularidad externa al contorno $|z| = a$, mientras que los otros dos son singularidades internas. Usando el hecho de que a la integral sólo aportan los términos que involucran una singularidad interna con una externa, la integral se reduce a

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}2iC\oint_{|z|=a}\frac{1}{(z-d)^2}\left[\frac{iC}{4(z-d/4)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z}\right] dz \quad .$$

Considerando que $(z-d)^{-2}$ es analítica en el disco $|z| \leq a$, haciendo uso del teorema generalizado de Cauchy obtenemos

$$F_x - iF_y = -C\rho 2\pi i\left\{\frac{\Gamma}{2\pi i}\left.\frac{1}{(z-d)^2}\right|_{z=0} + \frac{iC}{4}\left.\left[\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-d)^2}\right]\right|_{z=d/4}\right\} \quad ,$$

evaluando se obtiene

$$F_x - iF_y = 2\pi C\rho\left(\frac{32C}{27d^3} - \frac{\Gamma}{2\pi d^2}\right) \quad .$$

Como era de esperarse, la fuerza es horizontal debido a que la configuración tiene simetría de reflexión respecto del eje x. El valor de C para que la fuerza se anule es

$$C = \frac{27\,\Gamma d}{64\,\pi} \quad .$$