Estructura de la Materia 1 – 1^{er} Parcial

1^{er} Cuatrimestre 2017

Problema 1

El mecanismo de acreción esférica es un modelo para la acreción de materia del medio interestelar (ISM) sobre un objeto compacto tal como un agujero negro o una estrella de neutrones. El ISM consiste principalmente de gas y polvo que puede modelarse como un fluido de densidad ρ, velocidad $\vec{v}$ y presión P. Definido así, el sistema es esféricamente simétrico por lo que podremos asumir que todas las variables del fluido dependen de la distancia r del elemento de fluido al objeto compacto.

a) Si suponemos que muy lejos del objeto compacto la velocidad del fluido es nula, la velocidad del fluido en acreción tendrá sólo componente radial (porqué?). Considerando un proceso estacionario y usando la ecuación de continuidad, derive la ecuación de conservación del flujo de masa

$$r^2\,\rho\,v = K \qquad (K = cte.)$$

b) Plantee la componente radial de la ecuación de Euler para un ISM en estado estacionario bajo la hipótesis de que la única fuerza que actúa sobre el fluido es la fuerza gravitatoria del objeto compacto de masa M.

c) Utilizando el hecho de que podemos vincular la derivada radial de la presión y la derivada radial de la densidad mediante la relación

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2 \quad ,$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el medio, reescriba la ecuación de Euler en términos de v y ρ.

d) Usando los resultados de los puntos anteriores obtenga una ecuación diferencial para el campo de velocidades. Sin resolver la ecuación muestre que en el punto crítico

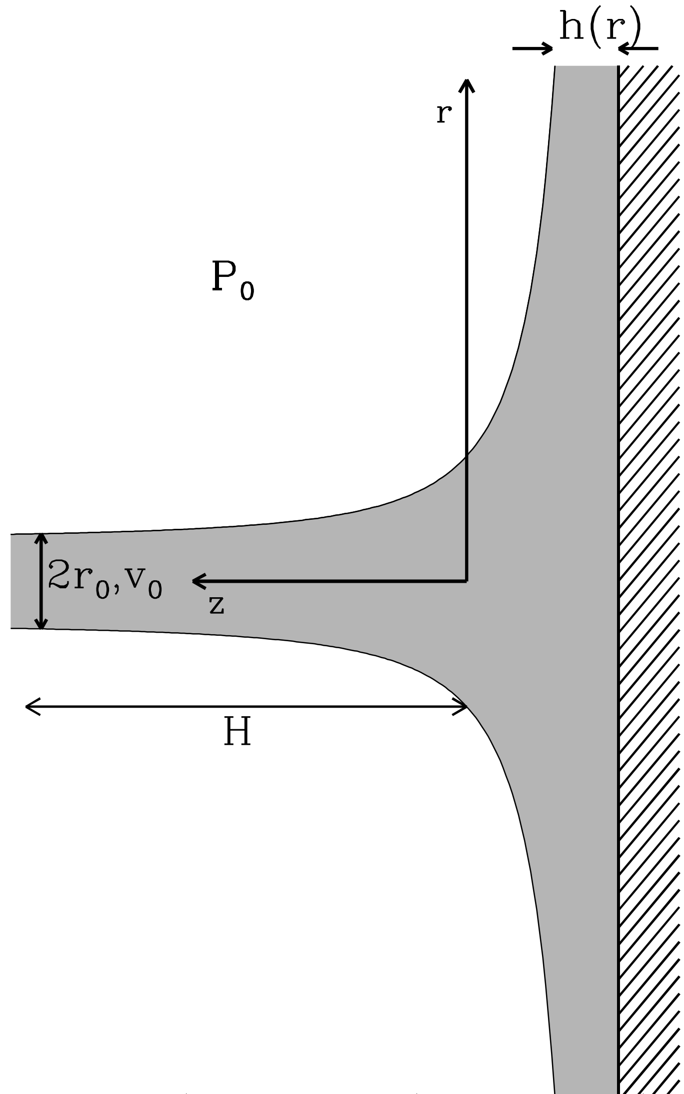
$$r_s = \frac{GM}{2cs^2} \quad ,$$

debe cumplirse que el campo de velocidades tiene un extremo o que $v = -c_s$.

Operadores diferenciales en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{a} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \\
\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}\right]_r &= a_r\frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial b_r}{\partial\theta} + \frac{a_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial b_r}{\partial\varphi} - \frac{a_\theta b_\theta + a_\varphi b_\varphi}{r}
\end{aligned}$$

Problema 2



Aclaración: Hay simetría de revolución alrededor del eje z

Un chorro cilíndrico de radio r_0 y velocidad v_0 incide verticalmente sobre una superficie horizontal desde una altura H. Suponga que el problema mantiene la simetría cilíndrica.

a) Calcule la altura de la superficie libre de fluido $h(r)$ para puntos muy alejados del eje de simetría del chorro ($r \gg r_0$) ignorando la influencia de la gravedad.

b) Ídem **a)** pero considerando la gravedad. ¿Para qué rango de valores de H es razonable la aproximación utilizada en **a)**?

c) Calcule la fuerza neta ejercida por el chorro sin considerar el efecto de la gravedad.

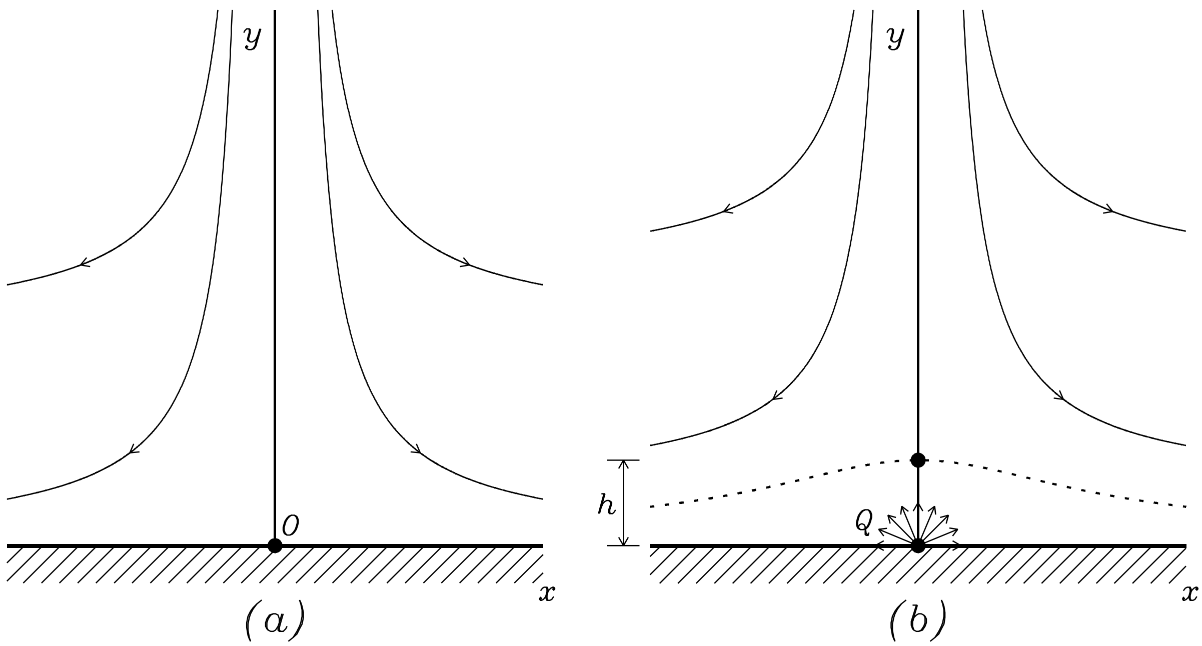
d) ¿Cómo se modificaría cualitativamente la fuerza calculada en **c)** si se incluyeran efectos gravitatorios?

Problema 3

El flujo potencial contra un contorno plano infinito se puede describir por la función de corriente

$$\psi(x, y) = Axy \quad ,$$

donde A es una constante. Este tipo de flujo se denomina comúnmente “punto de estancamiento”, ya que puede usarse para describir el flujo en la vecindad de un punto de estancamiento, el cual en la Figura (a) se encuentra en el origen.



a) Calcule el potencial complejo $W(z)$ correspondiente a la configuración de la figura (a).
b) Si en el origen se agrega una fuente de caudal Q, como se indica en la Figura (b), el punto de estancamiento se desplaza hacia arriba en el eje y hasta alcanzar una altura h. Encuentre h en función de A y Q.
c) La línea punteada es una separatriz entre el flujo saliente de la fuente y el que proviene del infinito, comportándose como si fuera un contorno sólido. Encuentre una expresión implícita para esta curva de la forma

$$y = f(x, y)$$

teniendo en cuenta que dicha curva corresponde a una línea de corriente.