

ESTRUCTURA DE MATERIA 1  
SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2020

PRÁCTICA 5  
INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS

---

**Problema 1.**

Considere el flujo general de un fluido incompresible plano de viscosidad cinemática  $\nu$ , en ausencia de fuerzas externas; tal que el campo de velocidades resulta  $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{z}} \nabla(x, y, t)$ . Mostrar que si se considera la componente  $\hat{\mathbf{z}}$  del rotor de la ecuación de Navier-Stokes, se llega a la siguiente ecuación para la evolución temporal de la vorticidad:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\psi, \omega] + \nu \nabla^2 \omega,$$

donde  $\omega = \omega \hat{\mathbf{z}} = -\nabla^2 \psi \hat{\mathbf{z}}$ , y

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x},$$

denota el corchete de Poisson clásico.

**Problema 2. INESTABILIDAD IDEAL DE FLUJOS PARALELOS**

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme  $\rho_0$ , y con un campo de velocidades bidimensional (de equilibrio) dado por  $\mathbf{u} = U(y) \hat{\mathbf{x}}$ .

(I) DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RAYLEIGH.

- a) Considere un campo de velocidades ligeramente perturbado mediante una perturbación lineal de la forma

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \delta\psi(x, y, t).$$

Muestre que la evolución temporal de la perturbación introducida a la vorticidad ( $\delta\omega$ ), puede escribirse, a primer orden, como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta\omega) = [\delta\psi, \omega_0] + [\psi_0, \delta\omega].$$

- b) Proponga ahora perturbaciones de la forma

$$\delta\psi(x, y, t) = \Phi(y) \exp\{i[kx - 2\pi f(k)t]\}$$

y verifique que el coeficiente de la perturbación,  $\Phi(y)$ , satisface

$$\Phi''(y) + \left( \frac{k U''(y)}{2\pi f(k) - k U(y)} - k^2 \right) \Phi(y) = 0.$$

Esta última expresión se denomina ECUACIÓN DE RAYLEIGH.

**Problema 3.**

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme  $\rho_0$ , y con un campo de velocidades bidimensional  $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$  donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases} .$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

**Problema 4.**

Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional  $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ , donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1 \\ y & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{si } y < -1 \end{cases} .$$

**Problema 5.**

Para un fluido ideal homogéneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por  $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$  con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si } y > 1 \\ 1 - y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si } y < -1 \end{cases} .$$

Sugerencia: Considere por separado las soluciones pares e impares para el sistema.