Resolución segundo parcial

Estructura de la Materia 1 - Segundo semestre de 2020

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del segundo parcial de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial**.
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Ejercicio 1

(a) Tenemos un flujo estacionario e incompresible entre dos cilindros concéntricos. El cilindro interior de radio a rota con velocidad angular ω y el exterior, de radio b, se mueve verticalmente con velocidad U, con lo cual, es fácil ver que la mejor forma de resolver este problema es en coordenadas cilíndricas. A modo de recapitulativo rápido, la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se encuentra disponible en varias fuentes; dichas expresiones podían hallarlas online en `http://materias.df.uba.ar/e1a2014c2/files/2014/10/Coord-Curv.pdf`, o bien en la bibliografía de la materia. La forma mas general de la ecuación de N-S en cilíndricas es,

$$\partial_t u_r + \left[u_r\partial_r + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta + u_z\partial_z\right]u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p + \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \partial zz\right]u_r - \nu\left[\frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_\theta\right],$$

$$\partial_t u_\theta + \left[u_r\partial_r + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta + u_z\partial_z\right]u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\partial_\theta p + \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \partial zz\right]u_\theta - \nu\left[\frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_r\right],$$

$$\partial_t u_z + \left[u_r\partial_r + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta + u_z\partial_z\right]u_z = -\frac{1}{\rho}\partial_z p + \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right) + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \partial zz\right]u_z.$$

Gracias a las simetrías y condiciones del problema podemos eliminar términos de las ecuaciones. Primero, como estamos en el régimen estacionario todos los términos de ∂_t quedan descartados. Por las simetrías del problema sabemos que las componentes de la velocidad $u_r = 0$, así que a priori nos queda $u_\theta \equiv u_\theta(r,\theta,z)$ y $u_z \equiv u_z(r,\theta,z)$. Sabemos que u_θ y u_z no puede depender de θ por simetría de rotación, y tampoco dependerán de z ya que existe simetría de traslación al considerarse los cilindros como infinitos. Entonces $\mathbf{u} \equiv u_\theta(r)\hat{\theta} + u_z(r)\hat{z}$. Con respecto a la presión, esta no puede depender de θ por simetría de rotación ni de z por simetría de traslación, con lo cual $p \equiv p(r)$. Una vez realizado el análisis estamos en condiciones de descartar términos de la ecuación dinámica del problema,

$$-\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p,$$

$$0 = \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right)\right]u_\theta - \nu\frac{u_\theta}{r^2}, \tag{1}$$

$$0 = \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\right)\right]u_z. \tag{2}$$

Para calcular u_θ podemos utilizar la ec.(1) proponiendo términos de la forma $u_\theta = Ar^n$,

$$\frac{Ar^n}{r^2} = \left[\frac{1}{r}nAr^{n-1} + n(n-1)Ar^{n-2}\right],$$

lo que nos lleva a la relación $n^2 = 1$, con lo cual $n = \pm 1$. Ahora sabemos que la solución sera de la forma $u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$, si aplicamos las condiciones de contorno vemos que $u_\theta(r = a) = Aa + \frac{B}{a} = \omega a$ y que $u_\theta(r = b) = Ab + \frac{B}{b} = 0$. Despejando llegamos a que u_θ es,

$$u_\theta(r) = \frac{\omega}{1 - \frac{b^2}{a^2}}\left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

Ahora calculamos u_z a partir de la ec.(2), notemos que $\left[\partial_r\left(r\partial_r\right)\right]u_z = 0$, con lo cual $r\partial_r u_z = C$. Es fácil ver que la solución sera $u_z(r) = ln(r)C + A$, si planteamos las condiciones de contorno vemos que $u_z(a) = ln(a)C + A = 0$ y que $u_z(b) = ln(b)C + A = U$. Despejando esta expresión u_z resulta,

$$u_z(r) = U\frac{ln\left(\frac{r}{a}\right)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

El campo de velocidades resulta,

$$\mathbf{u} = \frac{\omega}{1 - \frac{b^2}{a^2}}\left(r - \frac{b^2}{r}\right)\hat{\theta} + U\frac{ln\left(\frac{r}{a}\right)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{z}. \tag{3}$$

(b) Ahora queremos calcular el esfuerzo viscoso sobre el cilindro interior, $\tau = -\bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\hat{r})|_{r=a}$. En este caso resulta en,

$$\tau = \sigma_{r\theta}|_{r=a}\hat{\theta} + \sigma_{rz}|_{r=a}\hat{z}.$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)|_{r=a}\hat{\theta} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}|_{r=a}\hat{z}. \tag{4}$$

Remplazando la velocidad calculada en el inciso anterior (ec.(3)), en la ec.(4) resulta,

$$\tau = \frac{2\mu\omega}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}\hat{\theta} + \frac{\mu U}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{z}.$$

(c) Para calcular la potencia por unidad de longitud entregada por el cilindro exterior usamos análisis dimensional. A priori, todas las variables que podemos tener en cuenta son: $\mathcal{P}$, U, a, b, ρ y μ. Sabemos que la potencia por unidad de longitud se puede calcular como $\mathcal{P} = \mathbf{f}.\mathbf{v}$ donde $\mathbf{f}$ es la fuerza por unidad de longitud y $\mathbf{v}$ la velocidad. Podemos descartar ρ ya que no aparece en la velocidad. La viscosidad μ permanece ya que aparece en la interacción entre el fluido y el cilindro a través del tensor de esfuerzos (no es lo mismo mezclar miel que agua). La velocidad U es necesaria para que el cilindro exterior inyecte potencia al fluido. Por ultimo, la relación entre los radios de los cilindros a y b determinara sobre cuanto fluido se inyectara potencia. Ahora apliquemos el teorema pi,

$$f(\mathcal{P}, U, \mu, a, b) = 0,$$

Tenemos 5 variables y 3 unidades, con lo cual tenemos dos números pi. Las unidades de cada variable son $[\mathcal{P}] = MLT^{-3}$, $[U] = LT^{-1}$, $[a] = [b] = L$ y $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$. Podemos construir uno de los números pi como $\pi_1 = b/a$. Con lo cual, es facil ver que el otro numero pi se puede construir como

$$f(\pi_1, \pi_2) = f\left(\frac{b}{a}, \frac{\mathcal{P}}{\mu U^2}\right) = 0.$$

Con lo cual, la potencia por unidad de longitud resulta,

$$\mathcal{P} \approx \mu U^2 f\left(\frac{b}{a}\right).$$

Problema 2

Ante todo vale notar que este problema tiene marcadas similaridades con los problemas 1 y 8 de la práctica 6.

En este problema tenemos un fluido en reposo el cual se ve sometido a una pequeña perturbación, donde pequeña perturbación quiere decir que la amplitud con la que oscila la interfaz entre los fluidos a es mucho menor que la longitud característica de la perturbación en la dirección x, λ, y que la altura h (que, en particular, se considera infinita). Dado que hay dos fuerzas actuando, una volumétrica (la atracción gravitatoria) y otra superficial (la tensión superficial), y que ambas podrían actuar como fuerzas restitutivas, vamos a estudiar la presencia de ondas.

Para ello, como se vio en clase, vamos a considerar al flujo como invíscido, es decir, vamos a utilizar la ecuación de Euler en lugar de la ecuación de Navier-Stokes, y consideraremos también que el flujo resultante será incompresible. Ello implica que en todo el dominio donde haya fluido, la vorticidad de los elementos de fluido no varía y la componente irrotacional del flujo puede describirse mediante un potencial de velocidades que debe ser armónico

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{1}$$

También deberá satisfacerse la siguiente ecuación de Bernoulli

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) + p = 0, \tag{2}$$

donde se absorbió en ϕ una constante $\mathcal{C}(t)$ que depende exclusivamente del tiempo, puesto que esto no modifica el campo de velocidades $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi$, y se despreció un término proporcional a $|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2$ por estar considerando el límite de baja amplitud. También se se consideró constante a ρ[1]. **Adicionalmente, vale remarcar que éstas no son condiciones de contorno y que deben satisfacerse para todo el dominio ocupado por el fluido.**

a) En este primer inciso nos piden expresar las condiciones de contorno para el potencial de velocidades.

Para ello, notemos que la dinámica del flujo debe ser consistente con la expresión que nos sugieren para la discontinuidad en la presión

$$p_0 - p\big|_{z=\eta} = \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\,, \tag{3}$$

donde p_0 denota la presión atmosférica. El signo de esta última expresión puede verse fácilmente notando que la tensión superficial debe necesariamente actuar de manera restitutiva, oponiéndose al gradiente de presiones. **Notar, además, que esta última relación representa una discontinuidad para la presión en la interfaz, y solo tiene sentido considerar el término proporcional a σ al evaluar en $z = \eta$. Adicionalmente, vale remarcar que se consideró correcta la resolución del ejercicio aún si la expresión anterior tuviera el signo opuesto**. Reemplazando entonces en la expresión de Bernoulli y evaluando sobre la interfaz se tiene

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right)\bigg|_{z=\eta} + p_0 - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Esta última expresión derivada con respecto al tiempo resulta

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{z=\eta} + g\,\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

donde se supuso que η varía de manera suficientemente suave para que sea correcto intercambiar el orden de sus derivadas.

[1] Esto es un caso particular de incompresibilidad. Esta expresión es solo válida para flujos con densidad constante y no para flujos incompresibles en general.

Además, como se vio en clase, la variación temporal de la altura de la interfaz no es otra cosa que la velocidad vertical u_z. Adicionalmente, en forma consistente con el límite de pequeña amplitud bajo estudio, puede despreciarse la advección de la interfaz por el propio fluido, y entonces debe satisfacerse

$$u_z|_{z=\eta} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \underbrace{(\boldsymbol{u}|_{z=\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})\eta}_{\ll\partial_t\eta} \underset{u_z=\partial_z\phi}{\Longrightarrow} \frac{\partial\eta}{\partial t} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} \tag{6}$$

Reemplazando esta última relación en la ecuación (5) se obtiene

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{z=\eta} + g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=\eta}. \tag{7}$$

Finalmente, a fines de facilitar el tratamiento analítico, podemos realizar la aproximación $|_{z=\eta} \approx |_{z=0}$, de forma completamente consistente con el orden de aproximación utilizado hasta el momento (esto se demostró en la teórica). Por otra parte, la condición de regularidad en infinito para el campo de velocidades se ve inalterada al considerar la tensión superficial en la interfaz con el aire, obteniendo finalmente el conjunto de condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{z=\eta} + g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\sigma}{\rho}\left.\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial z}\right|_{z=0}, \tag{8}$$

$$\lim_{z\to-\infty}\|\boldsymbol{\nabla}\phi\| < \infty. \tag{9}$$

Notar que también se consideraron correctas (y equivalentes para este problema) las condiciones $|\partial\phi/\partial z| < \infty$ y $\partial\phi/\partial z = 0$.

b) En este inciso nos piden estudiar la relación de dispersión. Para ello, como es habitual a esta altura de la materia, proponemos que el potencial de velocidad ϕ tienen la forma de onda onda viajera monocromática en la dirección x, modulada en amplitud por una función de z, esto es

$$\phi = \Phi(z)\cos(kx - wt). \tag{10}$$

Dada la condición de regularidad, podemos directamente plantear una dependencia con e^{kz} para Φ, como hemos hecho en las clases prácticas. Sin embargo, en caso de querer mostrarlo, esto implica que la ecuación de Laplace (1) se reduce a

$$\Phi'' - k^2\Phi = 0, \tag{11}$$

que tiene como solución

$$\Phi = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \tag{12}$$

Y de la condición de regularidad se obtiene $B = 0$.

Resta exigir que se verifique la condición de contorno asociada a la discontinuidad en la presión. Reemplazando la forma propuesta para ϕ en la ecuación (8) se obtiene

$$(-\omega^2 + gk)Ae^{kz}\cos(kx - \omega t) = -\frac{\sigma}{\rho}k^3 Ae^{kz}\cos(kx - \omega t), \tag{13}$$

obteniendo finalmente la relación de dispersión

$$\boxed{\omega = \sqrt{k\left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho}\right)}.} \tag{14}$$

Notar que en el caso $\sigma = 0$, como era de esperar, esta última ecuación se reduce a la relación de dispersión sin tensión superficial $\omega^2 = gk$ (ejercicio 1 de la práctica 6). Además notar que, en efecto, el signo propuesto para el efecto de la tensión superficial efectivamente estabiliza al fluido (en caso contrario se tendría $\omega^2 = k(g - \sigma k^2/\rho)$, que podría tomar valores imaginarios).

Problema 3

En este ejercicio teníamos una onda de choque generada por un avión moviéndose a velocidad que llamaremos v_a, la cual es mayor que la del sonido. La onda de choque se mueve a la misma velocidad que el avión, y si nos paramos en el referencial que se mueve con el jet, y por ende con el choque, podemos aplicar las relaciones de Rankine Hugoniot sin más preámbulo.

(a) En el referencial del avión el fluido no perturbado aún que se encuentra adelante del avión, se acerca al choque con velocidad cuyo módulo es v_a. Por lo tanto, conociendo que el incremento en la temperatura luego del pasaje del choque es de un 10%, podemos utilizar la relación de Rankine Hugoniot que vincula temperaturas

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} = 1.1 = \frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma)[(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad .$$

Despejando nos queda una expresión bicuadrática para M_1

$$2\gamma(\gamma - 1)M_1^4 + [4\gamma - (\gamma - 1)^2 - 1.1(\gamma + 1)^2]M_1^2 + 2(1 - \gamma) = 0 \quad ,$$

que reemplazando por $\gamma = 1.4$ queda

$$1.12M_1^4 - 0.896M_1^2 - 0.8 = 0 \quad .$$

La única solución positiva que se obtiene es $M_1^2 \approx 1.335$ por lo que $M_1 \approx 1.155$.

Para encontrar la velocidad del avión lo único que resta es multiplicar M_1 por la velocidad del sonido en el aire imperturbado

$$v_a = c_1 M_1 = \sqrt{(\gamma - 1)c_p T_0} M_1 \approx 400 \text{ m/s} \quad .$$

(b) Con M_1 conocido, el cálculo de presiones y velocidades es automático

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_0} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}(M_1^2 - 1)\right] \approx 1.39 \quad ,$$

lo que muestra que el incremento porcentual de la presión es 39%.

El cociente de velocidades desde el sistema del choque es

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{v_a} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \approx 0.791 \quad .$$

Desde el sistema del choque la velocidad del aire luego del pasaje del avión es $0.791\ v_a$, por lo tanto en el sistema fijo la velocidad del aire es $U_2' = v_a - 0.791\ v_a = 0.209\ v_a \approx 83.6$ m/s.