Resolución primer recuperatorio

Estructura de la Materia 1 - Segundo semestre de 2020

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del primer recuperatorio de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial**.
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Ejercicio 1

(a) En este inciso nos piden calcular la densidad de un cilindro que se encuentra sumergido en un fluido estratificado tal como se muestra en la fig.(1). Además nos dicen que el cilindro se encuentra en equilibrio hidrostático en el seno del fluido, con su punto central a la altura z_0. De todas formas, las gallinitas no hablan.

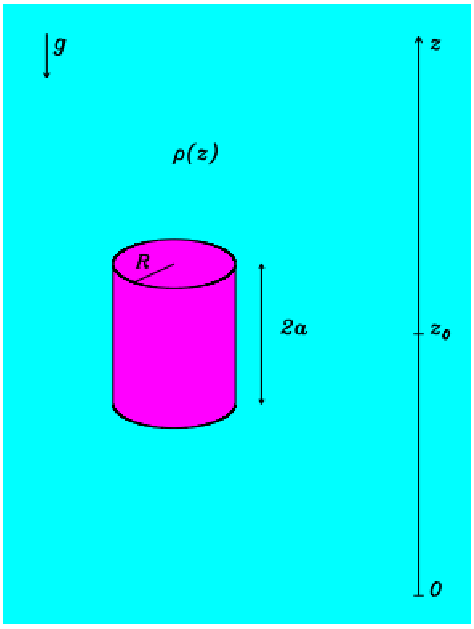

Figure 1: Cilindro de longitud $2a$, radio R y densidad σ que se encuentra en equilibrio hidrostático en el seno de un fluido estratificado, con su punto central a la altura z_0.

Como el sistema esta en equilibrio hidrodinámico la ecuación de Euler es la siguiente,

$$-\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{f} = 0, \tag{1}$$

en este caso $\boldsymbol{f}$ es debida a la gravedad. Teniendo esto en cuenta la ec.(1) resulta,

$$\nabla p = -\rho(z) g \hat{z}. \tag{2}$$

Vamos a poner un sistema de referencia en el centro del cilindro tal como sugiere el ejercicio y como se observa en la fig.(1). Para encontrar como se relaciona la presión con la fuerza podemos escribir el empuje que recibe el cilindro,

$$\mathbf{E} = -\int_s p\hat{n}\, ds \tag{3}$$

donde s es la superficie del cilindro. Para la ec.(3) podemos usar el teorema de la divergencia de Gauss quedando reescrita como,

$$\mathbf{E} = -\int_v \nabla p\, dv = \int_v \rho(z) g\hat{z}\, dv.$$

Donde se remplazo la ec.(2). Notemos que el empuje estará dado en la dirección $\hat{z}$, con lo cual nos podemos quedar solo con esa componente. Ahora utilizamos que la densidad del fluido es $\rho(z) = \rho_0 e^{-z/\delta}$, resultando,

$$E = \int_v \rho_0 e^{-z/\delta} g\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^r \int_{z_0-a}^{z_0+a} \rho_0 g e^{-z/\delta} r\, dz\, dr\, d\theta. \tag{4}$$

Además, notemos que al estar en equilibrio, el empuje sera igual a menos la fuerza peso del cilindro,

$$E = -P = \int_v \sigma g\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^r \int_{z_0-a}^{z_0+a} \sigma g\, r\, dz\, dr\, d\theta. \tag{5}$$

Teniendo en cuenta la dependencia de la densidad del flujo con z podemos escribir la siguiente igualdad,

$$\int_{z_0-a}^{z_0+a} \sigma g \; dz = \int_{z_0-a}^{z_0+a} \rho_0 g e^{-z/\delta} \; dz,$$

$$2a\sigma = -\rho_0 \delta \left[e^{-(z_0+a)/\delta} - e^{-(z_0-a)/\delta} \right],$$

de la que podemos despejar la densidad σ resultando,

$$\sigma = \rho_0 \frac{\delta}{a} e^{-z_0/\delta} \frac{\left[e^{a/\delta} - e^{-a/\delta} \right]}{2} = \rho_0 \frac{\delta}{a} e^{-z_0/\delta} \sinh(a/\delta),$$

b) El principio de Arquímedes nos dice que "Un cuerpo sumergido parcialmente o totalmente en un fluido experimenta una fuerza ascensional igual al peso del fluido desalojado por el mismo". Esto sigue valiendo para flujos estratificados ya que se puede observar que la igualdad entre la ec.(4) y la ec.(5) implica que la fuerza necesaria para mantener al cilindro en equilibrio hidrostático es igual al fluido desalojado por el mismo. Sin embargo, las gallinitas no hablan.

Problema 2

En este problema tenemos una placa cuadrada que inicialmente se haya suspendida en posición vertical gracias a un eje que pasa por la misma. Dicha placa es impactada por un chorro de fluido que lejos de la misma tiene dirección normal a la placa, apartando a la misma de la vertical.

a) Sabiendo que la misma alcanza una posición de equilibrio para un ángulo θ con respecto a la vertical, y que lejos de la misma el flujo tiene una sección S_0 y velocidad v_0 debemos calcular primeramente la fuerza que el fluido realiza sobre la placa.

Para ello resulta conveniente caracterizar el flujo luego de impactar con la placa. Considerando una línea de corriente que conecte un punto previo al choque y suficientemente lejos de la placa, el teorema de Bernoulli indica que

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}, \tag{1}$$

con v y p representan la velocidad y presión para un punto arbitrario sobre la misma línea de corriente y la densidad del fluido ρ se consideró constante. Es necesario notar que, como sugería el enunciado, se omitieron los términos asociados a la variación de energía potencial gravitatoria del fluido. En particular, para un punto posterior al impacto lo suficientemente lejos de la placa como para que las líneas de corriente sean paralelas a la misma, la presión allí debe ser necesariamente p_0 (piense por qué). A partir de esta observación y la ecuación anterior, y denotando con subíndice 1 a cualquier cantidad en dicho punto, se concluye entonces que $v_1 = v_0$. Adicionalmente, la conservación de masa requiere entonces que $S_1 = S_0$, es decir, que las secciones transversales muy lejos del choque deben ser iguales.

Caracterizado el flujo, veremos que se puede obtener la fuerza buscada utilizando el teorema de conservación de la cantidad de movimiento. Despreciando la aceleración debida a la gravedad y considerando que el flujo alcanzó un régimen estacionario, el mismo enuncia que debe verificarse la siguiente igualdad

$$\oint_{\partial\Omega} p\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\text{[1]} = -\oint_{\partial\Omega} \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S, \tag{2}$$

con $\partial\Omega$ la superficie límite a un volumen de control fijo en el espacio. Consideraremos como volumen de control la superficie lateral del chorro con S_0 y S_1 actuando como tapas. Notemos también que, dado que la presión externa p_0 puede considerarse constante, $\int_{\partial\Omega} p_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$. Por lo tanto la anterior igualdad es equivalente a

$$\oint_{\partial\Omega} p - p_0\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_{\partial\Omega} \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S. \tag{3}$$

El miembro izquierdo representa la fuerza que el fluido ejerce sobre la placa, puesto que la integral se anula en todos lados menos sobre la superficie de la placa (ya que, excepto sobre la placa, $p = p_0$). Por otra parte, dado que la superficie lateral está compuesta por líneas de corriente del flujo (y por lo tanto son ortogonales a la normal), la integral del miembro derecho se reduce a integrar sobre las tapas del volumen de control. Se tiene entonces

$$\boldsymbol{F}_f = -\int_{S_0} \rho v\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S - \int_{S_1} \rho v\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S, \tag{4}$$

con $v = \|\boldsymbol{v}\|$. Utilizando ahora un sistema de referencia cartesiano ortogonal donde el eje x resulta paralelo a la dirección incidente del chorro y el eje y antiparalelo a la dirección del campo gravitatorio, se obtiene

$$\boldsymbol{F}_f = -\rho v_0 S_0 \left[-v_0\hat{\boldsymbol{x}} + v_0\left(\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{x}} - \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}\right)\right] \tag{5}$$

obteniendo finalmente

$$\boxed{\boldsymbol{F}_f = \rho v_0^2 S_0 \left[\left(1 - \sin(\theta)\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}\right].} \tag{6}$$

[1] Con mayor generalidad, el integrando debería ser $\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S_j$, con σ_{ij} el tensor de tensiones del fluido.

Vale resaltar que la fuerza obtenida no es normal a la placa (piense que implicancias tiene esto). No obstante, se consideró correcta la resolución de aquelles estudiantes que supusieron que la fuerza tenía dirección normal y resolvieron solo para dicha componente.

b) Nos piden ahora calcular la fuerza de contacto y el peso de la placa. Para ello vale notar que la fuerza de contacto debe ser paralela a la placa [2]. Dado que la placa se halla en equilibrio, la suma de todas las fuerzas actuando debe ser nula, es decir

$$\boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_f = \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

con $\boldsymbol{F}_c$ y $\boldsymbol{F}_g$ la fuerza de contacto con el eje y el peso de la placa, respectivamente. Proyectando en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ se tiene

$$-F_c \sin(\theta) = -\rho v_0^2 S_0 (1 - \sin(\theta)) \qquad \Longrightarrow \qquad F_c = \frac{\rho v_0^2 S_0}{\sin(\theta)} \left(1 - \sin(\theta)\right), \tag{8}$$

mientras que para la dirección $\hat{\boldsymbol{y}}$ implica

$$F_g = \rho v_0^2 S_0 \cos(\theta) + \frac{\rho v_0^2 S_0}{\sin(\theta)} \left(1 - \sin(\theta)\right) \cos(\theta) \qquad \Longrightarrow \qquad F_g = \rho v_0^2 S_0 \cot(\theta), \tag{9}$$

obteniendo finalmente

$$\boldsymbol{F}_c = \frac{\rho v_0^2 S_0}{\sin(\theta)} \left(1 - \sin(\theta)\right) \left[-\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}\right], \tag{10}$$

$$\boldsymbol{F}_g = -\rho v_0^2 S_0 \cot(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{11}$$

Vale mencionar que como plantearon algunes estudiantes, los torques producidos por cada una de estas fuerzas deben anularse mutuamente ya que no hay cambio temporal del momento angular. Sin embargo, dado que se desconocen las dimensiones de la placa, a qué altura de la misma impacta el fluido y la presión en dicho punto, no se tienen datos suficientes para calcular el torque (o, equivalentemente, el punto de aplicación de la fuerza).

[2] En caso de que no resulte evidente puede pensarse en un eje que no encastra perfectamente en la placa sino que tiene un poco de juego.

Problema 3

En este problema tenemos un flujo uniforme en el infinito en la dirección del eje x y un dipolo fuente-sumidero de intensidad μ formando un ángulo de π con el semieje positivo de las x ubicado en $z_0 = id$.
(a) Si no tuviéramos ninguna condición de contorno por la presencia de paredes el potencial complejo sería

$$W(z) = U_0 z + \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{z - id} \quad .$$

Si ahora introducimos el contorno dado por el plano $y = 0$, debemos agregar la imagen del dipolo respecto del plano, mientras que el flujo uniforme en el infinito no requiere de ningún término agregado porque ya satisface la condición de contorno dada por el plano

$$W(z) = U_0 z + \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{z - id} + \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{z + id} \quad .$$

Por último, si agregamos la condición de contorno dada por el cilindro de radio a debemos considerar para cada uno de los tres términos del potencial un término adicional dado por el teorema del círculo de Milne-Thorne

$$W(z) = U_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{z - id} + \frac{1}{a^2/z + id} + \frac{1}{z + id} + \frac{1}{a^2/z - id}\right) \quad ,$$

y aquí es necesario notar que los tres términos agregados son simétricos respecto del plano $y = 0$, por lo que en conjunto también satisfacen la condición de contorno dada por el plano. Finalmente, usando la ayuda dada en el parcial (en su versión correcta) reescribimos el potencial complejo para llevar los términos a la forma $(z - z_0)^{-1}$

$$W(z) = U_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{z - id} + \frac{1}{z + id}\right) + \frac{\mu a^2}{2\pi d^2}\left(\frac{1}{z - ia^2/d} + \frac{1}{z + ia^2/d}\right) \quad .$$

(b) En este segundo ítem se nos pide demostrar explícitamente que el potencial complejo considerado verifica las condiciones de contorno. Para ello veremos que la parte imaginaria de $W(z)$, es decir la función de corriente $\psi(x, y)$ es constante sobre el contorno. Entonces, en primer término, veamos que ψ permanece constante sobre el plano

$$W(z)|_{z=x} = U_0\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + \frac{\mu}{2\pi}\left(\frac{1}{x - id} + \frac{1}{x + id}\right) + \frac{\mu a^2}{2\pi d^2}\left(\frac{1}{x - ia^2/d} + \frac{1}{x + ia^2/d}\right) \quad ,$$

que podemos reescribir como

$$W(z)|_{z=x} = U_0\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{x^2 + d^2} + \frac{\mu a^2}{2\pi d^2}\frac{1}{x^2 + a^4/d^2} \quad .$$

Evidentemente esta última expresión es real por lo que

$$\psi(x, y)|_{z=x} = 0 \quad .$$

Ahora sólo falta ver que sobre el círculo ψ sea constante. Entonces tomando $z = ae^{i\theta}$

$$W(z)|_{z=ae^{i\theta}} = U_0 \left(ae^{i\theta} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}} \right) + + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{ae^{i\theta} - id} + \frac{1}{ae^{i\theta} + id} \right) + \frac{\mu a^2}{2\pi d^2} \left(\frac{1}{ae^{i\theta} - ia^2/d} + \frac{1}{ae^{i\theta} + ia^2/d} \right) =$$

$$= 2U_0 a \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{2ae^{i\theta}}{a^2 e^{2i\theta} + d^2} + \frac{\mu a^2}{2\pi d^2} \frac{2ae^{i\theta}}{a^2 e^{2i\theta} + a^4/d^2} = 2U_0 a \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} 2ae^{i\theta} \left(\frac{1}{a^2 e^{2i\theta} + d^2} + \frac{1}{d^2 e^{2i\theta} + a^2} \right) =$$

$$2U_0 a \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} 2ae^{i\theta} \frac{d^2 e^{2i\theta} + a^2 + a^2 e^{2i\theta} + d^2}{a^2 d^2 (1 + e^{4i\theta}) + e^{2i\theta}(a^4 + d^4)} = 2U_0 a \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} 2ae^{i\theta} \frac{(a^2 + d^2)(1 + e^{2i\theta})}{e^{2i\theta}[2a^2 d^2 \cos(2\theta) + a^4 + d^4]} =$$

$$= 2a\cos(\theta) \left[U_0 + \frac{\mu}{\pi} \frac{a^2 + d^2}{2a^2 d^2 \cos(2\theta) + a^4 + d^4} \right] \quad ,$$

que es una expresión real, por lo que ψ también es nula sobre el círculo, y por lo tanto el mismo es una línea de corriente.