

Resolución segundo recuperatorio

Estructura de la Materia 1 - Segundo semestre de 2020

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del segundo recuperatorio de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial.**
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Ejercicio 1

(a) Queremos encontrar el campo de velocidades de un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad μ que llena el espacio interior de un prisma triangular cuya sección es un triángulo equilátero de lado a . El movimiento del fluido se debe a un gradiente de presiones constante $\Delta p/L = -P_0$ en la dirección \hat{x} ($P_0 > 0$), donde el referencial es el que se muestra en la fig.(1).

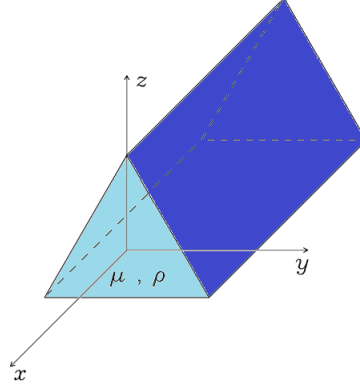


Figure 1: Prisma triangular cuya sección es un triángulo equilátero de lado a . El referencial se encuentra en el centro del triángulo equilátero.

La forma mas general de la ecuación de N-S en cartesianas es,

$$\partial_t u_x + [u_x \partial_x + u_y \partial_y + u_z \partial_z] u_x = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu [\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}] u_x,$$

$$\partial_t u_y + [u_x \partial_x + u_y \partial_y + u_z \partial_z] u_y = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu [\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}] u_y,$$

$$\partial_t u_z + [u_x \partial_x + u_y \partial_y + u_z \partial_z] u_z = -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \nu [\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}] u_z.$$

Gracias a las simetrías y condiciones del problema podemos eliminar términos de las ecuaciones. Primero, como estamos en el régimen estacionario todos los términos de ∂_t quedan descartados. Por las simetrías del problema sabemos que las componentes de la velocidad $u_y = u_z = 0$, y como sugiere el ejercicio, nos queda $u_x \equiv u_x(y, z)$. Con respecto a la presión, sabemos que el movimiento del fluido se debe a un gradiente de presiones constante $\Delta p/L = -P_0$ en la dirección \hat{x} . Una vez realizado el análisis estamos en condiciones de descartar términos de la ecuación dinámica del problema,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \nu [\partial_{yy} + \partial_{zz}] u_x(y, z), \quad (1)$$

Nos piden mostrar que el campo,

$$u_x(y, z) = A(2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a), \quad (2)$$

es solución a la ecuación ec.(1) y cumple las condiciones de contorno. Primero veamos que cumple las condiciones de contorno. Los vértices del triángulo equilátero están dados por,

$$z_+ = \frac{a + 3y}{\sqrt{3}}, \quad z_- = \frac{a - 3y}{\sqrt{3}}, \quad z_0 = \frac{-a}{2\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Es fácil ver que al remplazar cada una de las condiciones de contorno dadas por la ec.(3) en la ecuación del campo de velocidades (ec.(2)), se anula cada uno de los productos para cada una de las condiciones de contorno. Con lo cual,

la ecuación propuesta cumple las condiciones de contorno del problema. Veamos ahora la condición que debe cumplir A para que sea solución de la ecuación de N-S. Para ello, reemplazamos la ec.(2) en la ec.(1),

$$0 = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu[\partial_{yy} + \partial_{zz}] \left[A(2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a) \right] = \frac{P_0}{\rho} - \nu 36aA, \quad (4)$$

donde usamos que el gradiente de presión es igual a $-P_0$. Entonces, para que la ec.(2) sea solución de la ecuación de N-S tiene que valer,

$$A = \frac{P_0}{36\mu a}. \quad (5)$$

(b) Ahora se agrega una fuerza gravitatoria uniforme (por unidad de volumen) $F_g = -\rho g \hat{x}$, entonces la ecuación de N-S resulta,

$$0 = -\frac{1}{\rho}\partial_x p - g + \nu[\partial_{yy} + \partial_{zz}] u_x(y, z). \quad (6)$$

con lo cual, la nueva constante A queda escrita como,

$$A = \frac{P_0 - \rho g}{36\mu a}, \quad (7)$$

y el campo de velocidades resulta,

$$u_x(y, z) = \frac{P_0 - \rho g}{36\mu a} (2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a), \quad (8)$$

(c) Calculamos el esfuerzo que el fluido hace sobre una de las paredes del prisma, por simplicidad consideramos la pared inferior cuya condición de contorno es $z_- = \frac{-a}{2\sqrt{3}}$. Entonces tendremos,

$$\tau = \bar{\sigma} \cdot \hat{z} \Big|_{z=\frac{-a}{2\sqrt{3}}} = \mu \partial_z u_x(y, z) \Big|_{z=\frac{-a}{2\sqrt{3}}} \hat{x},$$

y usando que la derivada parcial es $\partial_z u_x(y, z) = -6\sqrt{3}A(\sqrt{3}az - 3z^2 + 3y^2)$, tendremos,

$$\tau_x = -\mu 6\sqrt{3}A \left[\sqrt{3}a \left(\frac{-a}{2\sqrt{3}} \right) - 3 \left(\frac{-a}{2\sqrt{3}} \right)^2 + 3y^2 \right],$$

$$\tau_x = \mu A \sqrt{3} \left(\frac{9}{2}a^2 - 18y^2 \right).$$

(d) Para calcular el caudal volumétrico usamos análisis dimensional. Las variables que tenemos en cuenta son P_0 , μ y a . La densidad ρ no la tenemos en cuenta ya que el caudal volumétrico depende de la velocidad del flujo, que a su vez no depende de ρ . Ahora apliquemos el teorema pi,

$$f(Q, P_0, \mu, a) = 0.$$

Tenemos 4 variables y 3 unidades, con lo cual tenemos un único número pi. Las unidades de cada variable son $[P_0] = ML^{-2}T^{-2}$, $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$, $[a] = L$ y $[Q] = L^3T^{-1}$. Con lo cual, es fácil ver que el caudal volumétrico se puede expresar como

$$Q \approx \frac{P_0}{\mu} a^4.$$

Si duplicamos el tamaño característico de la cañería vemos que el caudal se multiplica por un factor $2^4 = 16$.

Problema 2

a) En este inciso nos piden obtener la relación de dispersión para el caso en que se perturba *levemente*¹ al sistema. En este contexto podemos plantear que el problema queda totalmente representado por el campo de velocidades en cada fluido, \mathbf{v} y \mathbf{v}' , como así también la posición de la interfaz entre los fluidos $\eta(x, t)$ (nótese que siendo η la coordenada z donde se halla dicha interfaz no es ni podría ser función de z). Dichos campos de velocidades, a su vez, pueden derivarse de sendos potenciales escalares ϕ y ϕ' de forma que $\mathbf{v} = \nabla\phi$ (y una expresión análoga para \mathbf{v}'). Dado que el flujo generado, además de irrotacional, debe ser incompresible, dichos potenciales satisfacen una ecuación de Laplace, i.e. $\nabla^2\phi = \nabla^2\phi' = 0$.

Para describir completamente los campos de velocidades resulta necesario derivar condiciones de contorno consistentes con el escenario físico planteado. Dado que se trata de flujos ideales, las mismas requieren que la velocidad normal en cada pared se anule, es decir

$$v_x|_{x=0,L} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0, \quad (1)$$

$$v'_x|_{x=0,L} = \frac{\partial\phi'}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0, \quad (2)$$

$$v_z|_{z=-h} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0, \quad (3)$$

$$v'_z|_{z=h'} = \frac{\partial\phi'}{\partial z}\Big|_{z=h'} = 0. \quad (4)$$

Para describir estas ecuaciones se adoptó un sistema de referencia con origen en el extremo izquierdo de la interfaz y con la orientación propuesta en la correspondiente figura del enunciado. Adicionalmente, el flujo de uno y otro lado de la interfaz debe cumplir condiciones de empalme apropiadas. Dado que el mismo es ideal debe conservarse la componente normal de la velocidad, es decir

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\phi'}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad (5)$$

donde se aproximó la dirección normal a la interfaz por la dirección z y las derivadas en $z = \eta$ por $z = 0$, que resulta consistente con el nivel de aproximación discutido anteriormente. Por otro lado, ignorando los efectos de la tensión superficial, la presión debe ser continua a ambos lados de la interfaz. Para formalizar esto podemos utilizar la siguiente forma del teorema de Bernoulli a cada lado de la interfaz

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \frac{p}{\rho'} + gz = 0. \quad (7)$$

Evaluando estas expresiones en $z = \eta$, utilizando la continuidad de la presión, derivando con respecto al tiempo y aproximando $\partial_z\eta \approx v_z|_{z=0}$ ² obtenemos la segunda condición de empalme

$$\left[g(\rho - \rho') \frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Para obtener la forma funcional de los potenciales puede plantearse una solución separable en x y z con dependencia armónica en el tiempo o bien una suma de ondas viajeras en x con sentido contrario (y moduladas en z). Ambos procedimientos llevan al mismo resultado, aunque este último es físicamente más ilustrativo del efecto de las paredes en $x = 0, L$. En cualquiera de los dos casos el procedimiento es análogo a los ejercicios 3 y 5 de las guías de ejercicios, obteniéndose

$$\phi_n(x, z, t) = A_n \cosh(k_n(z + h)) \cos(k_n x) \cos(\omega t), \quad (9)$$

$$\phi'_n(x, z, t) = A'_n \cosh(k_n(z - h')) \cos(k_n x) \cos(\omega t), \quad (10)$$

¹Una definición más precisa de que significa *levemente* en este contexto puede hallarse en el material de las clases teóricas y prácticas.

²Una derivación detallada de estas aproximaciones puede encontrarse en las clases teóricas y prácticas.

donde k_n se obtiene de las condiciones de contorno sobre v_x y resulta $k_n = n\pi/L$, con $n \in \mathbb{Z}$.

A partir de la continuidad de la velocidad normal en la interfaz se obtiene

$$A'_n = -A_n \frac{\sinh(k_n h)}{\sinh(k_n h')}, \quad (11)$$

mientras que la condición sobre la presión implica

$$\left[A_n g(\rho - \rho') k_n \sinh(k_n h) - \omega^2 \left(A_n \rho \cosh(k_n h) - A'_n \rho' \cosh(-k_n h') \right) \right] \cos(k_n x) \cos(\omega t) = 0 \quad (12)$$

y descartando la solución $A_n = 0$ (pensar por qué) obtenemos finalmente la relación de dispersión

$$\omega_n^2 = \frac{n\pi}{L} \frac{g(\rho - \rho')}{\rho \coth(n\pi h/L) + \rho' \coth(n\pi h'/L)}. \quad (13)$$

Nótese que la relación de dispersión obtenida corresponde a ondas dispersivas y, en particular, coincide con la relación de dispersión obtenida en el ejercicio 5 de la práctica, con la diferencia que el espectro se encuentra discretizado.

b) Para hallar ahora la interfaz $\eta(x, t)$ podemos volver a las ecuaciones (6) y (7) en $z = \eta$, obteniendo

$$\eta = -\frac{1}{g(\rho - \rho')} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) \Big|_{z=0}, \quad (14)$$

donde nuevamente y de manera consistente se aproximaron las derivadas en $z = \eta$ (que dan lugar a una ecuación implícita) por sus valores en $z = 0$. Reemplazando por las expresiones obtenidas en el inciso anterior obtenemos

$$\eta_n(x, t) = \frac{\omega_n}{g(\rho - \rho')} \left[A \rho \cosh(k_n h) - A' \rho' \cosh(-k_n h') \right] \cos(k_n x) \sin(\omega_n t). \quad (15)$$

y por lo tanto la interfaz queda completamente determinada (a menos de la amplitud inicial en el campo de velocidades perturbado) como

$$\eta_n(x, t) = \frac{A k_n}{\omega_n} \sinh(k_n h) \cos(k_n x) \sin(\omega_n t), \quad (16)$$

y por tanto existe una diferencia de fase de $\pi/2$ entre las perturbaciones en el campo de velocidades y la forma de la interfaz. Nótese que, al igual que en el caso continuo, si se tiene una perturbación arbitraria, es decir, una perturbación cuya energía se distribuya en más de un k_n , deberán sumarse las soluciones para distintos valores de n .

Problema 3

(a) En este ítem nos piden que demostremos la relación planteada entre el ángulo de semiapertura de la cuña (α) y el ángulo entre el frente de choque y el eje horizontal (β). En primer término hacemos uso del hecho que la componente tangencial de la velocidad se conserva a través de la superficie de discontinuidad

$$|\vec{v}_1 \cdot \hat{t}| = |\vec{v}_2 \cdot \hat{t}| \implies v_1 \cos \beta = v_2 \cos(\beta - \alpha) \quad .$$

En segundo término usamos la relación de Rankine-Hugoniot que vincula las velocidades, la cual es una relación entre las componentes normales de la velocidad en caso de choques oblicuos

$$\frac{|\vec{v}_2 \cdot \hat{n}|}{|\vec{v}_1 \cdot \hat{n}|} = \frac{v_2 \sin(\beta - \alpha)}{v_1 \sin \beta} = \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan \beta} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad ,$$

donde en el tercer término hicimos uso de la continuidad de la componente tangencial de la velocidad y que $|\vec{M}_1 \cdot \hat{n}| = M_1 \sin \beta$. Ahora usamos la identidad trigonométrica propuesta para $\tan(\beta - \alpha)$

$$\frac{\tan \beta - \tan \alpha}{(1 + \tan \alpha \tan \beta) \tan \beta} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad .$$

Como la relación que nos piden demostrar tiene a $\tan \alpha$ en uno de sus miembros, es pertinente tratar de despejar esta cantidad en la igualdad a la que arribamos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} &= (1 + \tan \alpha \tan \beta) \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \implies \\ 1 - \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} &= \tan \alpha \left[\frac{1}{\tan \beta} + \tan \beta \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right] \implies \\ \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta - [(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2]}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} &= \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} = \tan \alpha \tan \beta \left[\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right] \\ \implies \tan \alpha &= \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{\tan \beta (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \frac{1}{\left[\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta} \right]} \\ \implies \tan \alpha &= \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{[\cos^2 \beta (\gamma + 1)M_1^2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2] \tan \beta} \\ \implies \tan \alpha &= \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{[\gamma M_1^2 + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)M_1^2 + 2] \tan \beta} \\ \implies \tan \alpha &= \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{\{M_1^2 [\gamma + \cos(2\beta)] + 2\} \tan \beta} \quad . \end{aligned}$$

(b) En este segundo punto nos piden hallar los valores de β que anulan la expresión. Se tienen dos posibilidades

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0 \quad , \quad \frac{1}{\tan \beta} = 0 \quad ,$$

por lo que los valores buscados son

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{M_1}\right) \quad , \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Esto genera un rango posible de casos para β , $\arcsin(1/M_1) < \beta < \pi/2$, y como α es positivo dentro del rango, a valor fijo de M_1 , debe existir un α_{max} dentro del mismo. Esto implica que para un par de valores fijos de $M_1 > 1$ y α (con $\alpha \neq \alpha_{max}$ correspondiente al valor de M_1), se tendrán dos valores posibles de β .

Aunque no se pretendía en la respuesta de este ejercicio nada más que lo expuesto hasta aquí, para quienes deseen profundizar acerca de la significancia física de estas dos soluciones del ángulo β , se propone indagar sobre la diferencia entre choques fuertes y débiles.