<u>Estructura de la Materia 1</u>

(Verano 2020 - Daniel Gómez)

Guía 5: Inestabilidades hidrodinámicas

1. Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0, y con un campo de velocidades bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

2. Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si } y > 1 \\ y & \text{si } -1 < y < 1 \\ -1 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

3. Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por $\mathbf{v} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si } y > 1 \\ 1 - y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{si } y < -1 \end{cases}$$

4. Considere un fluido compresible isotérmico unidimensional (todas las magnitudes dependen, por ejemplo, solamente de la dirección x), con ecuación de estado

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_s^2$$

donde c_s es la velocidad del sonido.

(a) Escriba la ecuación de continuidad para este gas.

(b) Considere el potencial autogravitatorio por unidad de masa Φ tal que

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

con G la constante universal gravitatoria, y escriba la ecuación de Euler para el gas.

(c) Verifique que un estado de reposo del gas con densidad uniforme ρ_0 es solución de las ecuaciones.

(d) Realice pequeñas perturbaciones sobre este equilibrio, y linealice el sistema resultante. Suponga que la perturbación es una onda plana

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(kx+\omega t)}$$

y halle la relación de dispersión del sistema.

(e) Muestre que si $k^2 c_s^2 < 4\pi G \rho_0$, ω es imaginaria pura y la perturbación inicial de densidad crece exponencialmente (*inestabilidad de Jeans*). El sistema es inestable cuando la fuerza de presión del gas es menor que la fuerza gravitatoria.

5. Dos elementos de fluido en un flujo turbulento están inicialmente a una distancia λ_1, donde λ_1 es una escala del rango inercial. A partir de análisis dimensional muestre que esta distancia crece como

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\epsilon\lambda)^{1/3},$$

donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de tiempo. Deduzca entonces que el tiempo requerido para que la distancia entre los dos elementos de fluido sea λ_2 (con $\lambda_2 \gg \lambda_1$) es $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}$.

6. A partir de análisis dimensional muestre que para un flujo turbulento en ausencia de fuerzas externas, el balance de energía se reduce a

$$\frac{dE}{dt} \sim -\epsilon.$$

Asumiendo que la energía decae en forma auto-semejante $E(t) \sim E_0 t^{-\alpha}$, y que el fluido está contenido en un recipiente con longitud característica L, muestre que $\alpha = 2$.