Estructura de la Materia 1 – Práctica 0

El objetivo de esta práctica es lograr un manejo fluido de la notación indicial, principalmente para poder seguir adecuadamente los desarrollos teóricos de la materia. Los alumnos que ya hayan cursado Teórica 1 posiblemente no tendrán dificultades en resolver esta práctica.

Problema 1

La cualidad de tensor de un objeto queda definida por sus reglas de transformación (cambios de sistemas de coordenadas con origen fijo). Así, la transformación de un tensor de rango 1 A_l (un único índice, su representación gráfica sería un vector) de un sistema S a un sistema S', verifica (no haremos aquí distición entre notación *covariante* y *contravariante*, sólo consideraremos tensores cartesianos, para profundizar el tema puede consultarse el texto de Santaló)

$$A'_i = c_{il} A_l \quad .$$

Aquí el miembro izquierdo, primado, representa el tensor en el sistema S' y en el miembro derecho tenemos el tensor en el sistema S junto con un objeto de dos índices que vehiculiza el pasaje de un sistema a otro (su representación gráfica sería una matriz cuadrada, una matriz de cambio de base o de transformación). En la expresión se utiliza notación de Einstein (suma implícita de índices repetidos, o contracción de índices) y si bien la dimensionalidad en un caso general podría ser cualquiera, en lo atinente a esta materia consideraremos el espacio tridimensional, por lo que $1 \leq i, l \leq 3$. Para no complejizar la notación, en la mayoría de los textos se omite el primado en el tensor transformado.
Si ahora consideramos un tensor de rango 2, la regla de transformación es

$$A'_{ij} = c_{il} c_{jm} A_{lm} \quad ;$$

viéndose como regla general que la transformación de un tensor de rango n implica la contracción del tensor en el sistema original con n objetos de transformación c_{kn}.

i) Luego de esta breve introducción, pasamos a considerar el problema específico de demostrar que el tensor delta de Kronecker es isótropo, es decir que es invariante ante un cambio en cualquier orientación de los ejes que consideremos. Para ello veremos que la delta de Kronecker es invariante ante rotaciones y reflexiones. Como primer paso veamos cómo opera la delta de Kronecker al contraerse con las matrices de transformación, para ello consideremos

$$\delta_{1l} c_{jl} \equiv \delta_{11} c_{j1} + \delta_{12} c_{j2} + \delta_{13} c_{j3} = c_{j1} \quad ;$$

por lo que expresándolo en forma más general

$$\delta_{il} c_{jl} = c_{ji} \quad .$$

Entonces, para la transformación de la delta de Kronecker tendremos

$$\delta'_{ij} = c_{il}c_{jm}\delta_{lm} = c_{il}c_{jl} = \delta_{ij} \quad ,$$

donde en la última igualdad usamos que $CC^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}$, ya que para rotaciones y reflexiones tenemos $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$. La igualdad

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$$

expresa la invariancia de la delta de Kronecker, es decir que su expresión es la misma para cualquier sistema de coordenadas.

Antes de demostrar la invariancia del *pseudotensor* de Levi-Civita analizaremos algunas de sus propiedades. En primer lugar digamos por qué hablamos de *pseudotensor* o *densidad tensorial*; la regla de transformación de un pseudotensor es levemente diferente a la de un tensor. Por ejemplo si B_{ijk} es un pseudotensor de tercer orden, su regla de transformación es

$$B'_{lmn} = \det(C)\, c_{li}c_{mj}c_{nk}B_{ijk}$$

donde $\det(C) = \pm 1$, dependiendo si tenemos una rotación propia (+1) o impropia (reflexión, -1).

Por otro lado veamos que el pseudotensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} puede asociarse con la definición del determinante de una matriz de 3×3. Si bien todos aprendemos la forma operacional de calcular una matriz de $N \times N$ desarrollando por fila o por columna y reduciendo finalmente al cálculo de determinantes de matrices de 2×2, recordemos que la definición básica del determinante de una matriz es la suma de todos los diferentes productos que pueden obtenerse involucrando una única componente por cada fila y columna (con un signo adicional en cada término). En el caso de una matriz A de 3×3 esto puede expresarse como

$$\det(A) = \sum_{\{ijk\}\, perm\, \{123\}} (-1)^p a_{1i}a_{2j}a_{3k} \quad ,$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones posibles de la terna $\{123\}$. El factor $(-1)^p$ es el signo adicional que mencionamos anteriormente y p es la paridad de la permutación. Ahora, teniendo en cuenta la definición de ϵ_{ijk} es inmediato expresar el determinante de la matriz A como

$$\det(A) = \epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \quad .$$

Es más, definiendo el pseudotensor de Levi-Civita de orden N puede expresarse el determinante de una matriz B de cualquier dimensionalidad como

$$\det(B) = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N}a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{Ni_N} \quad .$$

A partir de esto, podemos plantear la siguiente identidad

$$\det(C)\,\epsilon_{pqr} = \epsilon_{ijk}c_{1i}c_{2j}c_{3k}\,\epsilon_{pqr} \quad .$$

Por otro lado obtuvimos en el ítem **III)** del mismo problema la siguiente identidad

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad ,$$

entonces podemos escribir

$$\det(C)\,\epsilon_{pqr} = [\delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}) - \delta_{iq}(\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kp}) + \delta_{ir}(\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp})]\,c_{1i}c_{2j}c_{3k} =$$

$$= c_{1p}c_{2q}c_{3r} + c_{1q}c_{2r}c_{3p} + c_{1r}c_{2p}c_{3q} - c_{1p}c_{2r}c_{3q} - c_{1q}c_{2p}c_{3r} - c_{1r}c_{2q}c_{3p} =$$

$$= c_{1p}(\epsilon_{1jk}c_{jq}c_{kr}) + c_{2p}(\epsilon_{2jk}c_{jq}c_{kr}) + c_{3p}(\epsilon_{3jk}c_{jq}c_{kr}) = \epsilon_{ijk}c_{ip}c_{jq}c_{kr} \quad .$$

Por ser el Levi-Civita un pseudotensor, su regla de transformación es

$$\epsilon'_{pqr} = \det(C)\,\underbrace{c_{ip}c_{jq}c_{kr}\epsilon_{ijk}}_{\det(C)\,\epsilon_{pqr}} = [\det(C)]^2\,\epsilon_{pqr} \quad ,$$

y considerando que C es una matriz de transformación con origen fijo (rotación o reflexión) se tiene que $\det(C) = \pm 1$, y en definitiva

$$\epsilon'_{pqr} = \epsilon_{pqr} \quad .$$

ii) La densidad tensorial de Levi-Civita tiene 3 índices que toman los valores 1, 2 y 3, entonces el número de componentes del tensor es $3^3 = 27$, podemos visualizarlo como tres matrices de 3×3, en cada una de las cuales un índice permanece fijo. Por ejemplo si elegimos el primer índice como el fijo tendremos

$$\epsilon_{1jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon_{2jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \epsilon_{3jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

iii) Para comprobar la identidad solicitada primero expresemos el tensor de Levi-Civita en forma diferente, en función de deltas de Kronecker y teniendo en cuenta como se vio en el ítem anterior que el Levi-Civita tiene sólo 6 componentes no nulas

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{lmn}\delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} = \delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} - \delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k} + \delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} - \delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k} + \delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k} \quad ;$$

o reagrupando

$$\epsilon_{ijk} = \delta_{1i}(\delta_{2j}\delta_{3k} - \delta_{3j}\delta_{2k}) + \delta_{2i}(\delta_{3j}\delta_{1k} - \delta_{1j}\delta_{3k}) + \delta_{3i}(\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{2j}\delta_{1k}) = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \quad .$$

Entonces tendremos

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \\ \delta_{1r} & \delta_{2r} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \quad ,$$

y usando propiedades del determinante, $\det(A)\ \det(B) = \det(A)\ \det(B^{\mathrm{T}}) = \det(A\,B^{\mathrm{T}})$, reescribimos

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \left| \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad .$$

Por si no queda demasiado claro cómo se arriba a la última igualdad (que es lo que queríamos demostrar), analicemos cómo se obtiene una de las componentes, la correspondiente a la primera fila y primera columna (δ_{ip}). El producto de la primera fila por la primera columna es

$$\delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} = \delta_{mi}\delta_{mp} = \delta_{ip} \quad .$$

iv) Resolvemos sólo el primer ítem, demostrar la identidad $\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$. Para ello usemos la expresión obtenida en el ítem anterior con el primer índice contraído

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} = \delta_{ii}(\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}) + \delta_{ir}(\delta_{js}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{ks}) + \delta_{is}(\delta_{ji}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ki})$$

Ahora consideremos las contracciones que aparecen en el primer término ($\delta_{ii} = 3$), segundo término ($\delta_{ir}\delta_{ki} = \delta_{kr}$ y $\delta_{ir}\delta_{ji} = \delta_{jr}$) y tercer término ($\delta_{is}\delta_{ji} = \delta_{js}$ y $\delta_{is}\delta_{ki} = \delta_{ks}$) por lo que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = 3(\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}) + (\delta_{js}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ks}) + (\delta_{js}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ks}) = (\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}) \quad ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Problema 4

De este ejercicio resolveremos sólo algunos ítems, usando las identidades obtenidas en el Problema 1.

iii)

$$(\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{w} \times \vec{s}) = (\vec{u}\,.\,\vec{w})(\vec{v}\,.\,\vec{s}) - (\vec{u}\,.\,\vec{s})(\vec{v}\,.\,\vec{w})$$

$$(\vec{u}\times\vec{v}).(\vec{w}\times\vec{s}) = \epsilon_{ijk}u_jv_k\epsilon_{imn}w_ms_n = (\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ks})u_jv_kw_ms_n = u_jw_jv_ks_k - u_js_jv_kw_k \quad ,$$

donde usamos que la contracción de los dos Levi-Civita puede escribirse como productos de deltas de Kronecker y el último término es justamente la notación indicial para $(\vec{u}\,.\,\vec{w})(\vec{v}\,.\,\vec{s})-(\vec{u}\,.\,\vec{s})(\vec{v}\,.\,\vec{w})$.

xiii)

$$\nabla\,.(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\,.(\nabla\times u) - u\,.(\nabla\times v)$$

$$\nabla\,.(\vec{u}\times\vec{v}) = \partial_i(\vec{u}\times\vec{v})_i = \partial_i(\epsilon_{ijk}u_ju_k) = \epsilon_{ijk}v_k\partial_iu_j + \epsilon_{ijk}u_j\partial_iv_k \quad .$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{kij}$ y que $\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}$ podemos escribir

$$\nabla\,.(u\times v) = v_k\underbrace{\epsilon_{kij}\partial_iu_j}_{(\nabla\times\vec{u})_k} - u_j\underbrace{\epsilon_{jik}\partial_iv_k}_{(\nabla\times\vec{v})_j} = \vec{v}\,.(\nabla\times u) - u\,.(\nabla\times v) \quad .$$

xvi)

$$\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}(\nabla\,.\,\vec{v}) - \vec{v}(\nabla\,.\,\vec{u}) + (\vec{v}\,.\,\nabla)\vec{u} - (\vec{u}\,.\,\nabla)\vec{v}$$

Es una identidad diferencial vectorial, tomemos la componente i de esta identidad vectorial

$$\{\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v})\}_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{u}\times\vec{v})_k = \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{kmn}u_mv_n = \epsilon_{kij}\epsilon_{kmn}\partial_j(u_mv_n) \quad .$$

Para la contracción de los dos Levi-Civita llegamos en el Problema 1 a una expresión en términos de productos de deltas de Kronecker

$$\{\nabla\times(\vec{u}\times\vec{v})\}_i = (\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})(v_n\partial_ju_m - u_m\partial_jv_n) = v_j\partial_ju_i + u_i\partial_jv_j - v_i\partial_ju_j - u_j\partial_jv_i =$$

$$= \{(\vec{v}\,.\,\nabla)\vec{u} + \vec{u}(\nabla\,.\,\vec{v}) - \vec{v}(\nabla\,.\,\vec{u}) - (\vec{u}\,.\,\nabla)\vec{v}\}_i \quad ,$$

que es justamente lo que se quería demostrar.