Estructura de la Materia 1 – Práctica 1

En esta práctica se introducen los conceptos de descripción Lagrangiana y Euleriana de un fluido. Asimismo se plantea la ecuación fundamental de la hidrostática y se introduce la ecuación de Euler que permite describir la evolución de un fluido ideal.

Antes de comenzar con el primer problema que elegimos desarrollar, en primer término mencionemos brevemente las hipótesis básicas que asumiremos durante el curso para realizar la descripción de la evolución de un fluido. Asumiremos la *hipótesis del continuo*, la cual establece que si miramos el fluido en una escala lo suficientemente grande comparada con la distancia intramolecular de las moléculas que forman el fluido podremos definir funciones escalares y vectoriales continuas que representen densidad, temperatura, velocidad, etc. del mismo. Estos valores representarán un promedio macroscópico de esas magnitudes dentro de un volumen pequeño de fluido ($\sim 10^{-9} - 10^{-11}$ cm^{-3}) pero en el cual tenemos un gran número de moléculas del fluido ($\gtrsim 10^{10}$).

Luego de las consideraciones anteriores, existen diferentes formas de describir el fluido. Introducimos la noción de elemento de fluido, como el de una *partícula de fluido* que conserva su identidad al moverse y al que son aplicables las leyes de conservación clásicas. Esta partícula de fluido estará caracterizada por su posición, su velocidad y sus propiedades termodinámicas dadas en función del tiempo. La identificación de cada partícula puede hacerse convenientemente a través de la posición $\vec{X}_0$ que ocupaba en un instante característico t_0; en un instante posterior t la posición de la "partícula $\vec{X}_0$" (podemos etiquetarla así) será $\vec{X}(t, \vec{X}_0)$ y

$$\vec{U}(t, \vec{X}_0) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \quad , \quad \vec{A}(t, \vec{X}_0) = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \quad ,$$

serán su velocidad y su aceleración respectivamente. Esta descripción del fluido que es la extensión natural de la cinemática de partículas discretas al medio continuo recibe el nombre de *descripción Lagrangiana* o *material* del fluido.

Una descripción alternativa es la *descripción Euleriana* o *de campos*. En esta descripción se dan para cada instante t las propiedades que tiene en ese instante el elemento de fluido que está en $\vec{x}$. En esta descripción tendremos el campo de velocidades $\vec{u}(\vec{x}, t)$, el de densidades $\rho(\vec{x}, t)$, el de temperaturas $T(\vec{x}, t)$, etc. Por ejemplo, en la descripción Euleriana $\vec{u}(\vec{x}, t)$ es la velocidad del elemento de fluido que en el instante t se encuentra en la posición $\vec{x}$.

Las leyes básicas de conservación se aplica a cada partícula material de fluido, por lo que es de interés determinar cómo cambian con el tiempo las distintas propiedades de una dada partícula fluida. Entonces podremos decir por ejemplo que la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de una partícula es igual a la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan, o que la variación de su energía cinética es igual al trabajo de las fuerzas aplicadas, etc. En la descripción Lagrangiana se tendrá directamente para cualquier magnitud B que caracterice al elemento de fluido

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad .$$

En el caso de la descripción Euleriana debemos “seguir” al elemento de fluido en cuestión, es decir que debemos considerar su cambio de posición $\delta\vec{x}$ correspondiente al diferencial de tiempo transcurrido δt

$$\delta b = b(\vec{x}+\delta\vec{x}, t+\delta t) - b(\vec{x}, t) = \frac{\partial b}{\partial t}\delta t + \frac{\partial b}{\partial x_i}\delta x_i = \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i}u_i\right)\delta t \quad ,$$

por lo que pasando al límite $\delta t \to 0$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)b \quad ,$$

que se conoce como *derivada convectiva* o *material*.

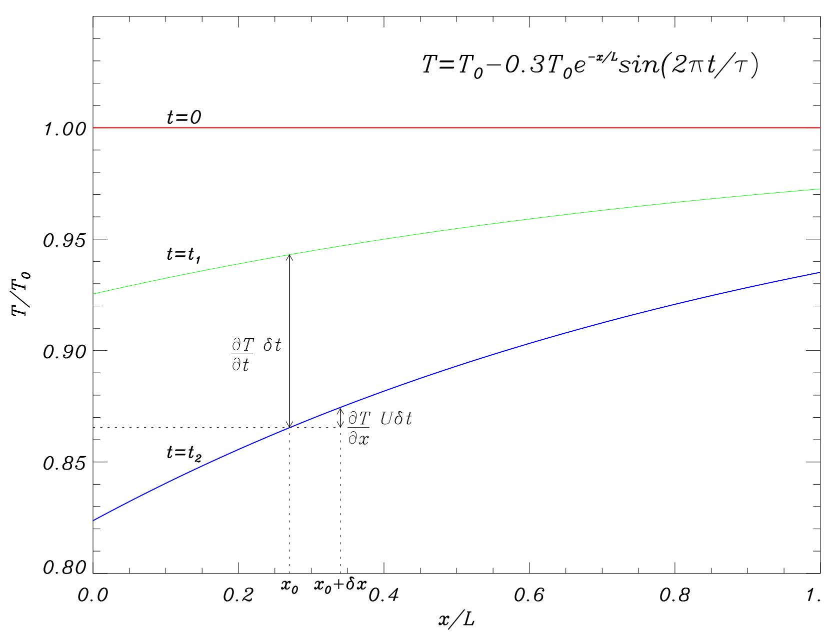
Problema 2

Temperatura en el túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad , \quad 0 \le x \le L \quad .$$

i) Partimos de una descripción de campos o Euleriana, que nos da la temperatura del fluido dentro de un túnel en función de la posición y del tiempo. Si asumimos que la partícula varía instantáneamente su temperatura adquiriendo la misma temperatura que el fluido que la circunda tendremos para la razón de cambio de la temperatura de la partícula con el tiempo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + U\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha e^{-x/L}\left[\frac{U}{L}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) - \frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] \quad .$$



En la figura puede observarse la representación gráfica de las dos componentes de la derivada convectiva (multiplicadas por δt), por un lado $\frac{\partial T}{\partial t}\delta t$ representa la variación de la temperatura en el túnel en la posición fija x_0 al transcurrir un tiempo δt, mientras que el término $\frac{\partial T}{\partial x}U\delta t$ corresponde a la variación de la temperatura en el túnel entre dos posiciones a tiempo fijo, x_0 y $x_0 + U\delta t$, las posiciones que inicialmente ocupaba la partícula y la que ocupa luego de un tiempo δt.

ii) Para pasar a una descripción Lagrangiana lo único que deberíamos hacer es asociar la variable espacial del campo $T(x, t)$ con la posición de la partícula, es decir, hacer la sustitución $x = Ut$, por lo tanto

$$T(X_0 = 0, t) = T_0 - \alpha e^{-Ut/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad .$$

Ahora tendremos directamente que la variación de la temperatura de la partícula con el tiempo es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha e^{-Ut/L}\left[\frac{U}{L}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) - \frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] \quad ,$$

y obviamente las dos descripciones coinciden.

Problema 4

Antes de resolver este problema debemos introducir las nociones de trayectoria, línea de corriente y línea de traza.

Las líneas de corriente son las líneas que en un instante dado son tangentes en cada uno de sus puntos al campo de velocidades, entonces en un dado tiempo el diferencial $\vec{d\ell}$ de longitud de esta línea verifica

$$\vec{d\ell} \parallel \vec{u}(\vec{x}, t) \Longrightarrow \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad ,$$

y dan una descripción instantánea del fluido.

El concepto de trayectoria a esta altura de la carrera ya lo tenemos bien internalizado, las trayectorias son las líneas definidas por las posiciones que ocupan cada uno de los elementos de fluido en un dado lapso de tiempo. A diferencia de las líneas de corriente no dan una visualización instantánea del fluido si no que indican cómo ha evolucionado el flujo. Su expresión matemática está dada en la descripción Lagrangiana por la curva $\vec{X}(t, \vec{X}_0)$ dada al transcurrir t. Si se parte de una descripción Euleriana del campo de velocidades, deberá tenerse en cuenta la relación

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad ,$$

la cual no siempre es analíticamente integrable.

Las líneas de traza son las líneas formadas por la posición al tiempo t de todas las partículas que en un tiempo anterior pasaron pon un punto de referencia fijo $\vec{x}_r$. Con descripción Lagrangiana, si $\vec{X}_0(t', \vec{x}_r)$ es la posición a $t = 0$ del elemento de fluido que en t' ocupó la posición de referencia $\vec{x}_r$, la

línea de traza estará dada por $\vec{X}(t, \vec{X}_0(t', \vec{x}_r))$ descripta al variar t' entre $t = 0$ y t. Para determinarse $\vec{X}_0(t', \vec{x}_r)$ debe invertirse la relación $\vec{x}_r = \vec{X}(t', \vec{X}_0)$.
Puede demostrarse que para un flujo estacionario las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza coinciden.

Luego de las definiciones pasemos a resolver el ejercicio. Tenemos un campo de velocidades bidimensional dado por

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \quad , \quad v_y(x, y, t) = c \quad .$$

Primeramente calculamos las líneas de corriente, haciendo uso de la identidad

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Longrightarrow \frac{c(1 + \beta t)}{\alpha x} dx = dy \quad ,$$

e integrando entre (x_0, y_0) y un punto (x, y) genérico obtenemos

$$y = y_0 + \frac{c(1 + \beta t)}{\alpha} \ln\left(\left|\frac{x}{x_0}\right|\right) \quad .$$

En segundo lugar, las trayectorias, para ello integramos en el tiempo las componentes de la velocidad

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} \ln\left(\left|\frac{x}{x_0}\right|\right) = \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta t) \Longrightarrow x = x_0(1 + \beta t)^{\alpha/\beta} \quad ,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = c \Longrightarrow y = y_0 + ct \quad .$$

Es usual dar una expresión de la forma $y = y(x)$ para la trayectoria, por lo que entre las dos ecuaciones de arriba debemos eliminar el tiempo como parámetro para obtenerse

$$y = y_0 + \frac{c}{\beta}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha/\beta} - 1\right] \quad .$$

Para las líneas de traza consideremos que tenemos un punto de referencia fijo (x_r, y_r) en el instante t. Calculemos para un elemento de fluido que en $t = 0$ se encontraba en (x_0, y_0) y en el instante t' en el punto de referencia (x_r, y_r), entonces

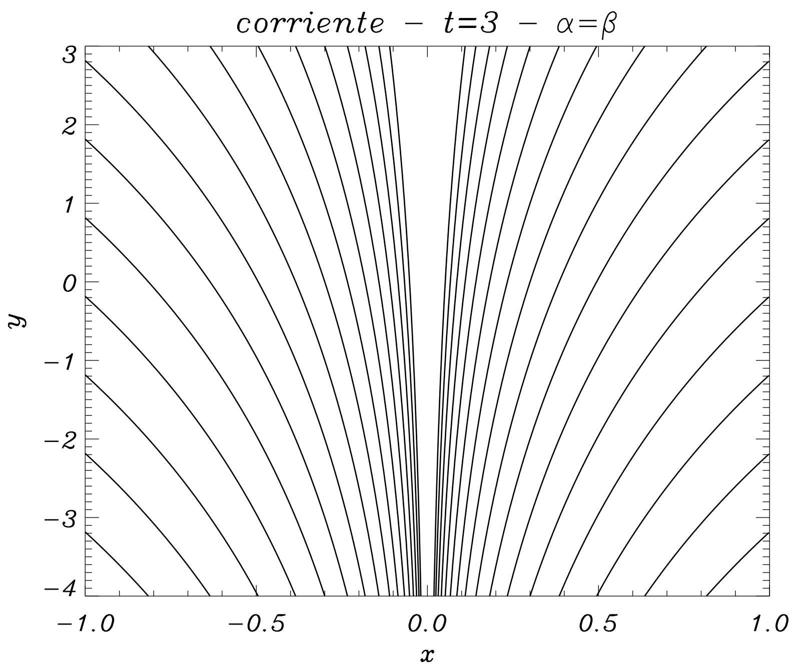
$$x_r = x_0(1 + \beta t')^{\alpha/\beta} \Longrightarrow x_0 = x_r(1 + \beta t')^{-\alpha/\beta} \Longrightarrow x = x_r \frac{(1 + \beta t)^{\alpha/\beta}}{(1 + \beta t')^{\alpha/\beta}} \quad ,$$

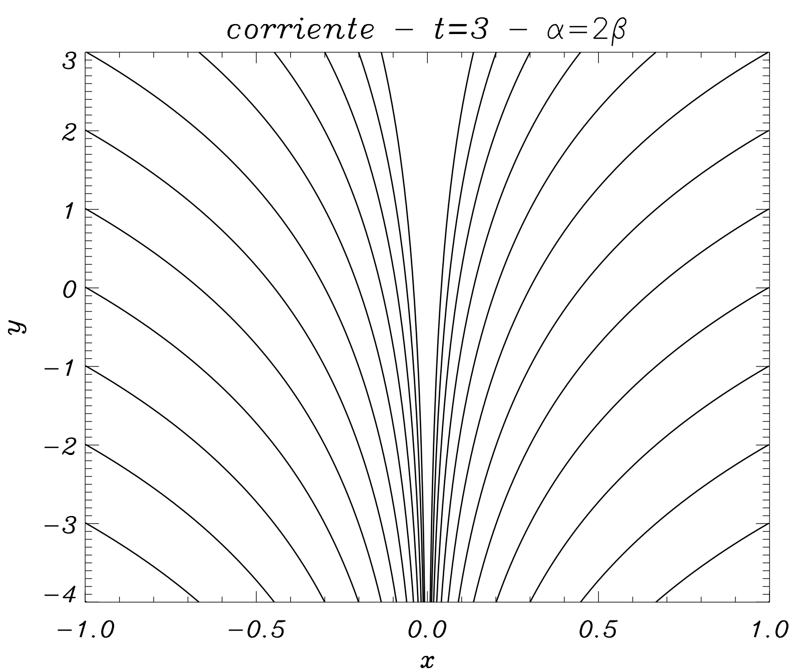
$$y_r = y_0 + ct' \Longrightarrow y_0 = y_r - ct' \Longrightarrow y = y_r + c(t - t') \quad .$$

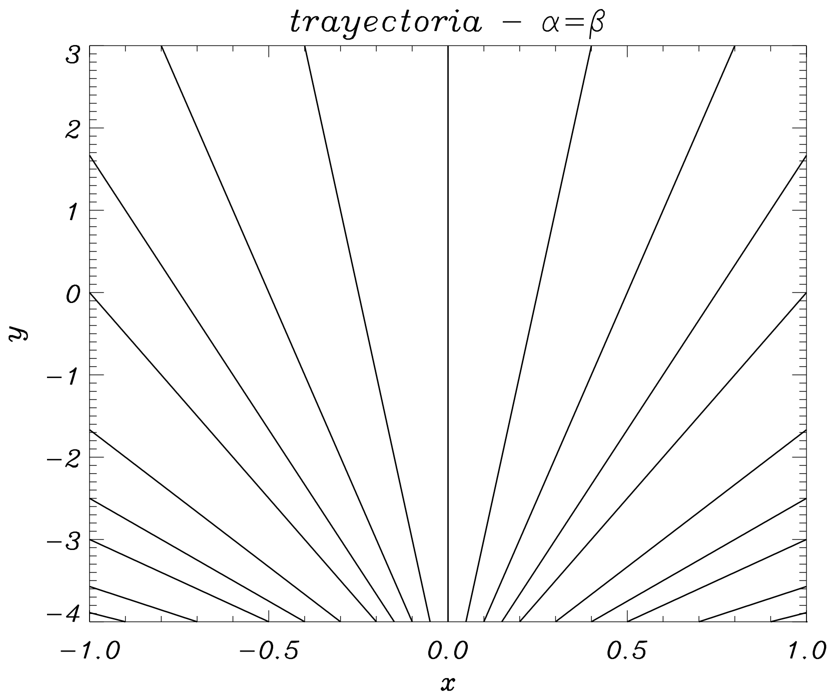
Para obtener una expresión $y = y(x)$ despejamos t' de las igualdades anteriores y reemplazamos

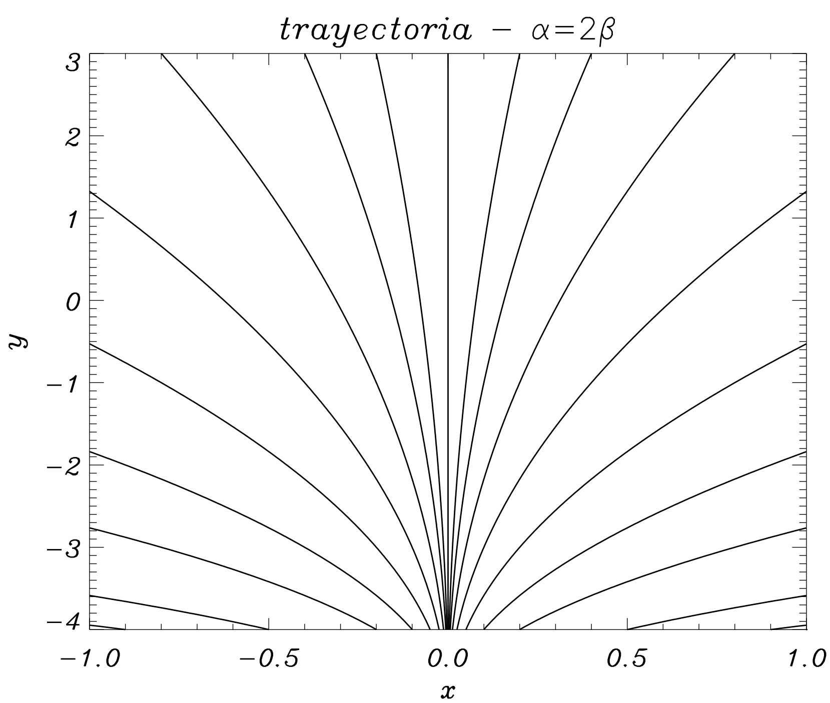
$$y = y_r + \frac{c}{\beta}(1 + \beta t)\left[1 - \left(\frac{x_r}{x}\right)^{\beta/\alpha}\right] \quad .$$

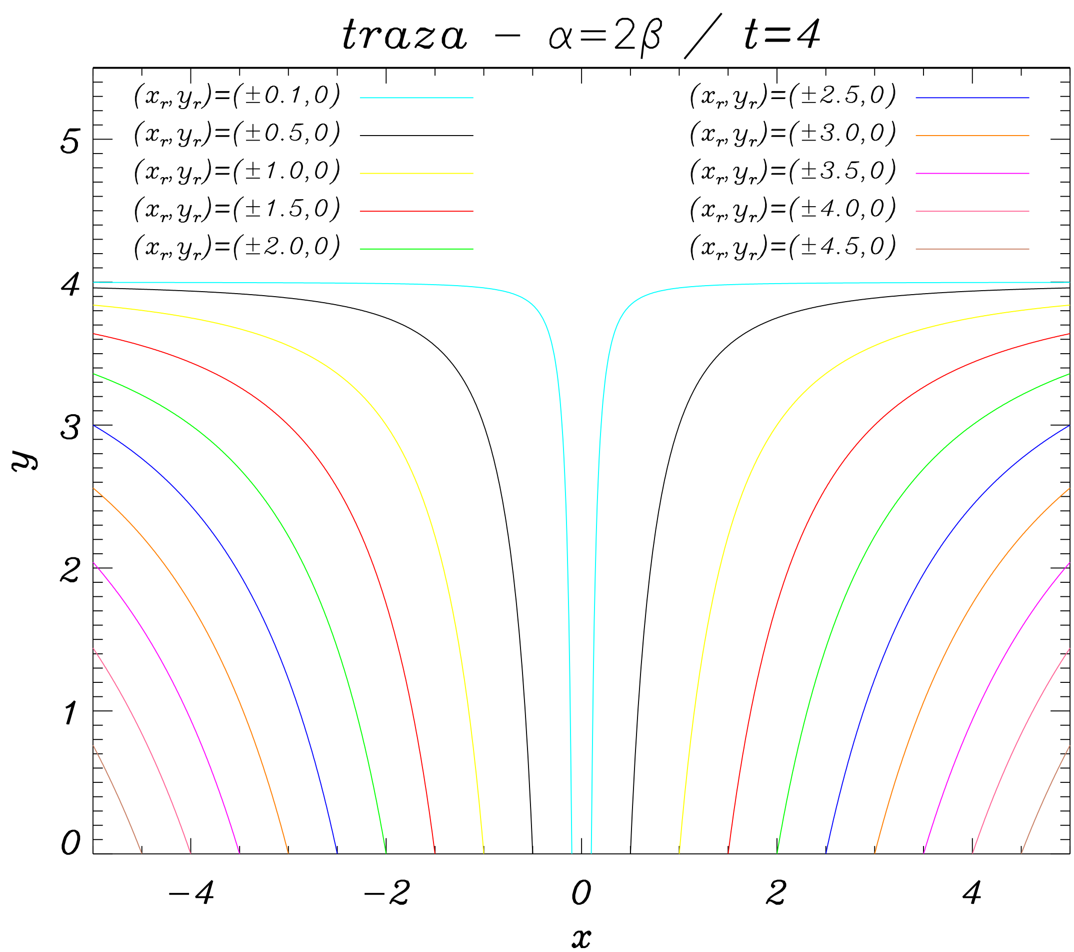
A continuación algunos gráficos de trayectorias, líneas de corriente y traza donde hemos tomado $\beta = c = 1$.






trayectoria – α=β
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


trayectoria – α=2β
y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


traza – α=2β / t=4
(x_r,y_r)=(±0.1,0)
(x_r,y_r)=(±0.5,0)
(x_r,y_r)=(±1.0,0)
(x_r,y_r)=(±1.5,0)
(x_r,y_r)=(±2.0,0)
(x_r,y_r)=(±2.5,0)
(x_r,y_r)=(±3.0,0)
(x_r,y_r)=(±3.5,0)
(x_r,y_r)=(±4.0,0)
(x_r,y_r)=(±4.5,0)
y
x
0
1
2
3
4
5
−4
−2
0
2
4