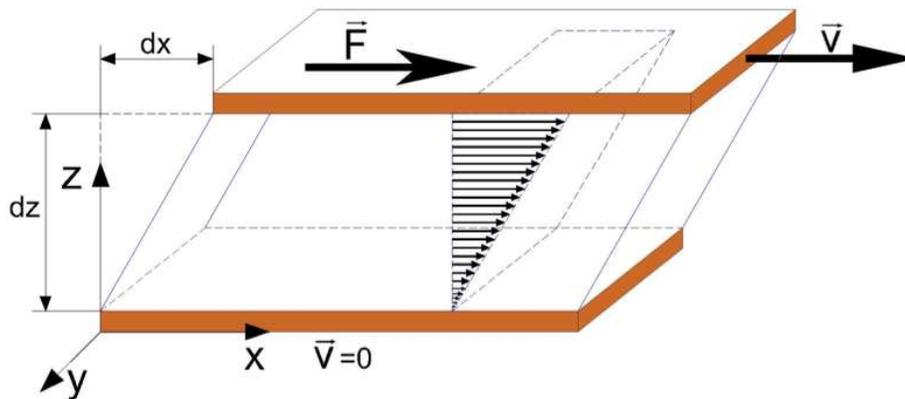


## Estructura de la Materia 1 – Práctica 4

En esta práctica vamos a considerar fluidos viscosos en casos sencillos, configuraciones más o menos simples y viscosidad uniforme. Para introducir el tema empecemos por un ejemplo sencillo de la experiencia diaria donde es patente la existencia de esfuerzos tangenciales en los fluidos reales. Pensemos en el caso esquematizado en la figura, si inicialmente el fluido entre la tabla superior móvil y el fondo fijo se encuentra en reposo, al aplicarse una fuerza constante a la tabla superior, luego de un corto período de tiempo se establecerá un régimen estacionario en el que el fluido en contacto con la tabla se moverá solidariamente con ella a una velocidad  $v_0$  y a medida que nos movemos hacia abajo en el fluido la velocidad irá decreciendo (luego, en los ejercicios, podremos deducir que la distribución de velocidades es lineal). A este tipo de flujos se los denomina laminares, porque el fluido se mueve



como en láminas independientes con distintas velocidades. Para la configuración de alta simetría que consideramos en el ejemplo puede verse en forma empírica que el esfuerzo tangencial  $\tau$  que ejerce el fluido es proporcional a la velocidad final con la que se mueve la tabla e inversamente proporcional a la profundidad del fluido, es decir  $\tau \propto v_0/dz$ . Se define el fluido newtoniano como aquel para el cual los esfuerzos tangenciales que entre sí se ejercen los elementos de fluido son proporcionales a las derivadas espaciales primeras del campo de velocidades

$$\tau \propto \frac{\partial v_i}{\partial x_j} ,$$

En nuestro ejemplo tendríamos  $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}$ , siendo  $\mu$  el coeficiente de viscosidad dinámico. Para considerar en forma más general el problema de cómo representar los esfuerzos tangenciales del fluido, deberíamos encontrar una expresión para la parte viscosa del tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} ,$$

donde  $\sigma'_{ij}$  es el tensor de esfuerzos viscosos. En vista de lo que dijimos más arriba sobre los esfuerzos,

para un fluido newtoniano deberíamos tener un tensor de esfuerzos viscosos de la forma

$$\sigma'_{ij} = \alpha \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \beta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad ,$$

pero si además imponemos la condición de que una translación rígida ni una rotación rígida generan rozamiento interno, se puede demostrar que la forma más general del tensor es

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) + \mu' \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad ,$$

donde el tensor se escribió como la suma de un tensor simétrico (el primero) de traza nula y otro isótropo (el segundo), que sólo toma relevancia cuando el fluido es compresible. El coeficiente  $\mu'$  se denomina segunda viscosidad. Esta forma del tensor de esfuerzos viscosos es válida cuando la estructura molecular del fluido es estadísticamente isótropa, es decir, cuando el esfuerzo generado sobre un elemento de fluido por un dado gradiente de velocidades es independiente de la orientación del elemento. Todos los gases tienen estructura molecular estadísticamente isótropa y los líquidos simples también. En cambio suspensiones (sangre, pintura etc) y soluciones conteniendo moléculas muy largas pueden exhibir alguna preferencia direccional llevando al alineamiento de estas moléculas en una manera que depende de la historia del movimiento. Estos fluidos no pueden considerarse newtonianos.

Reemplazando la nueva expresión que tenemos para el tensor de esfuerzos en la ecuación indefinida que vimos al principio del curso (y de la cual se derivó la ecuación de Euler tomando  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , es decir fluido ideal) obtenemos

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{F} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \left( \frac{\mu}{3} + \mu' \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{F} \quad ,$$

que se conoce como ecuación de Navier-Stokes. En los problemas de la práctica sólo resolveremos casos en los que el fluido es incompresible, por lo que el penúltimo término de la ecuación nunca aparecerá. La expresión con la que trabajaremos será entonces

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \quad ,$$

donde  $\nu \equiv \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática. El efecto del término con el Laplaciano en la dinámica del fluido será el de suavizar gradientes de velocidad.

Se define un número adimensional que permite mensurar la importancia del término viscoso en la ecuación de Navier-Stokes comparándolo con el término inercial, el número de Reynolds

$$R = \left| \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}{\nu \nabla^2 \vec{v}} \right| \sim \frac{VL}{\nu} \quad ,$$

donde  $V$  y  $L$  representan la velocidad y longitud típicas del problema. En general se distinguen dos regímenes, si  $R \ll 1$  se dice que el fluido es prácticamente ideal, mientras que si  $R \gg 1$  el fluido se denomina viscoso. Es necesario mencionar que aunque  $R \ll 1$  los efectos de la viscosidad pueden ser importantes en la dinámica del fluido, sobre todo al dejarlo evolucionar en tiempos largos.

Después de este breve repaso teórico, pasamos a resolver algunos de los ejercicios de la Guía 4.

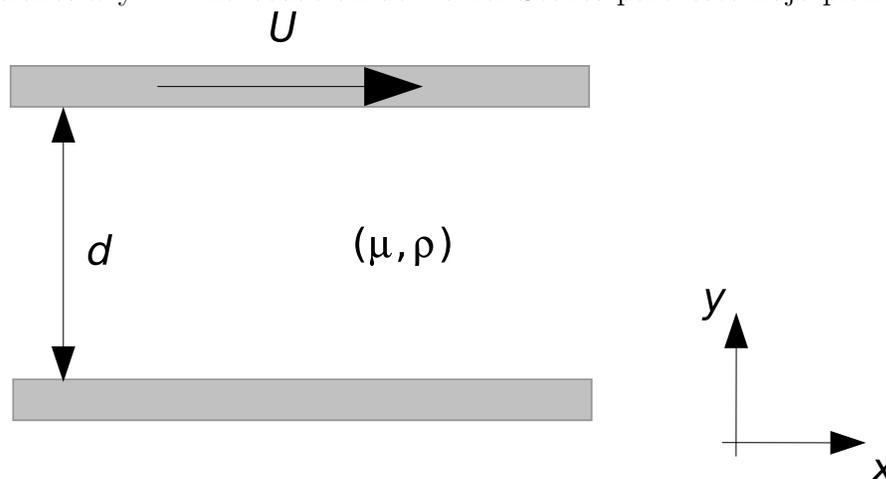
## Problema 1

Nos plantean un campo de velocidades de los llamados flujos plano-paralelos, el vector velocidad está alineado con un versor y depende de las coordenadas espaciales asociadas a las direcciones normales a dicho versor. En este caso particular

$$\vec{v} = v_x(y)\hat{x} \implies (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z)v_x \hat{x} = v_x \partial_x v_x = 0 \quad ,$$

donde los términos se fueron anulando debido a que  $v_y = v_z = 0$ , y en el último paso a que  $v_x = v_x(y)$ .

i) Se considera ahora el caso de un fluido entre dos planos, móvil el superior y en reposo el inferior. Veamos que esta es la versión idealizada del problema de la figura anterior, ahora con simetría de translación en las direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$ . La ecuación de Navier-Stokes para este flujo plano-paralelo y



estacionario será

$$0 = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad ,$$

y por la simetría del problema debemos tener  $\vec{v} = v_x(y)\hat{x}$ , la coordenada  $\hat{x}$  de Navier-Stokes es

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \quad ,$$

mientras que las coordenadas  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  nos dicen que la presión es independiente de  $y$  y  $z$ . Por otro lado dijimos que hay simetría de translación en  $\hat{x}$ , por lo que necesariamente  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , quedando para el campo de velocidades

$$0 = \frac{d^2 v_x}{dy^2} \implies v_x(y) = Ay + B \quad .$$

Para encontrar las constantes de integración usamos las condiciones de contorno

$$v_x(y = 0) = 0 \quad , \quad v_x(y = d) = U$$

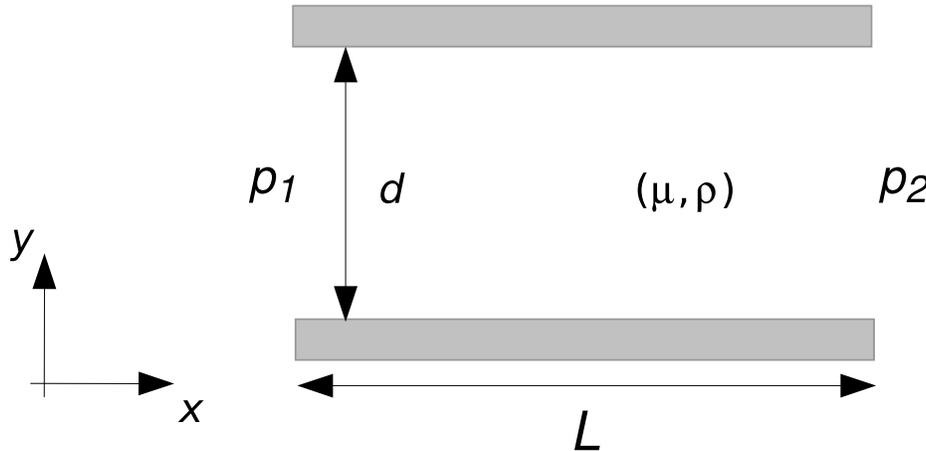
ya que la velocidad de un fluido en contacto con un contorno sólido debe ser igual a la del sólido. Esto nos permite concluir

$$v_x(y) = U \frac{y}{d} \quad .$$

El esfuerzo viscoso sobre ambos planos será

$$\tau_i = -\sigma_{ij}n_j \implies \tau_x|_{y=0} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu U}{d} \quad , \quad \tau_x|_{y=d} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=d} = -\frac{\mu U}{d} \quad .$$

ii) En este caso tenemos la misma geometría que en el anterior pero los dos planos están inmóviles y el fluido se mueve debido a un gradiente de presiones. Sea  $G = \frac{(p_2 - p_1)}{L}$  el gradiente de presiones



constante sobre el fluido, la ecuación de Navier-Stokes en  $\hat{x}$  será en este caso

$$0 = -G + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \implies v_x(y) = \frac{G}{2\mu} y^2 + Ay + B \quad .$$

Con las condiciones de contorno

$$v_x(y = 0) = 0 \quad , \quad v_x(y = d) = 0 \quad ,$$

tenemos en definitiva

$$v_x(y) = \frac{G}{2\mu} y(y - d) \quad .$$

Notemos que si el gradiente de presiones es positivo el movimiento es hacia la izquierda, y en caso contrario hacia la derecha.

El esfuerzo que el fluido realiza sobre el plano inferior es

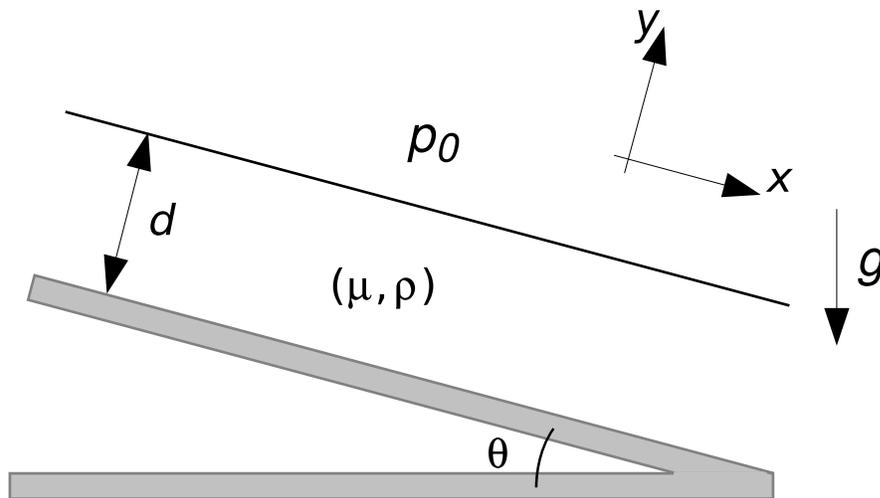
$$\tau_x|_{y=0} = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{G}{2\mu} (2y - d) \Big|_{y=0} = -\frac{Gd}{2} ,$$

y para el plano superior

$$\tau_x|_{y=d} = -\mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=d} = -\mu \frac{G}{2\mu} (2y - d) \Big|_{y=d} = -\frac{Gd}{2} .$$

## Problema 2

En este ejercicio tenemos una capa de fluido muy viscoso que desciende por gravedad por un plano inclinado, teniendo una profundidad uniforme  $d$ , estando la capa superior del fluido expuesta a una atmósfera con presión uniforme. Nos piden analizar el caso estacionario.



Considerando que por simetría  $\vec{v} = v_x(y)\hat{x}$ , tendremos para la componente  $\hat{x}$  de la ecuación de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \rho g \sin \theta ,$$

donde el primer término se anula ya que hay simetría de translación en  $\hat{x}$ . Entonces

$$v_x(y) = -\frac{g \sin \theta}{2\nu} y^2 + Ay + B .$$

Vemos ahora que tenemos una condición de contorno que es  $v_x(y = 0) = 0$ , mientras que no tenemos una condición similar para  $y = d$ . Pensemos entonces que en  $y = d$  tenemos además la condición de que las fuerzas que cada fluido ejerce sobre el otro deben ser iguales y de signo contrario. Para los

fluidos 1 y 2 simbólicamente esta condición se expresaría como

$$n_k^1 \sigma_{ik}^1 + n_k^2 \sigma_{ik}^2 = 0 \quad ,$$

y teniendo en cuenta que  $\hat{n}^1 = -\hat{n}^2$  la condición se puede reescribir como

$$n_k \sigma_{ik}^1 = n_k \sigma_{ik}^2 \quad .$$

La componente normal de la última condición en nuestro caso dará

$$p(y = d) = p_0 \quad ,$$

mientras que la componente tangencial implicará

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=d} = \mu_{aire} \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=d} \approx 0$$

donde en el último paso hemos despreciado la viscosidad dinámica del aire respecto de la del líquido ( $\mu_{aire} \ll \mu$ ). Ahora tenemos para el campo de velocidades dos condiciones de contorno que nos permiten obtener las constantes  $A$  y  $B$ , para llegar a

$$v_x(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} y(2d - y) \quad .$$

La componente  $\hat{y}$  de la ecuación de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta \quad ,$$

nos permite obtener la distribución de presiones

$$p(y) = p_0 + \rho g \cos \theta (d - y) \quad .$$

ii) La velocidad promedio es

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{g \sin \theta}{2\nu} y(2d - y) dy = \frac{g \sin \theta d^2}{3\nu} \quad ,$$

mientras que la velocidad máxima es  $v_{max} = v_x(y = d) = \frac{g \sin \theta d^2}{2\nu}$ , entonces

$$\frac{\langle v_x \rangle}{v_{max}} = \frac{2}{3} \quad .$$

iii) Caudal másico por unidad de ancho del plano

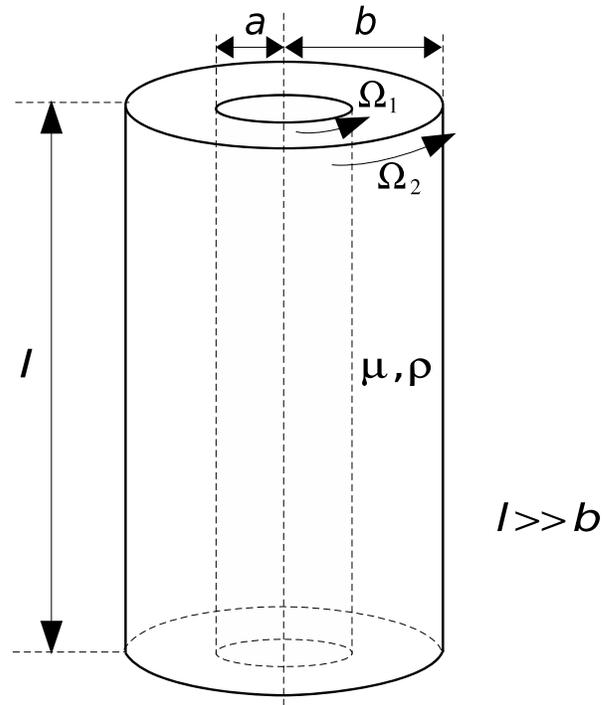
$$Q = \rho \int_0^d v_x(y) dy = \rho \langle v_x \rangle d = \frac{\rho g \sin \theta d^3}{3\nu} .$$

## Problema 6

iv)

En este problema nos piden las soluciones laminares y estacionarias para las diferentes configuraciones que se muestran. Sólo resolveremos la última, que consiste de dos cilindros coaxiales de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ) que rotan con diferentes velocidades angulares  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Nos dicen que la longitud de los cilindros  $\ell \gg a, b$ , y con estos nos sugieren que tomemos el límite de  $\ell \rightarrow \infty$ . En esta situación de alta simetría y considerando las condiciones de contorno, sugerimos un campo de velocidades de la forma (expresado en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ )

$$\vec{v} = v_\theta(r) \hat{\theta} ,$$



que si bien es un flujo plano-paralelo al estar

expresado en coordenadas cilíndricas no nos asegura la nulidad del término convectivo en la ecuación de Navier-Stokes. Revisando la forma del término  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  con la dependencia y dirección del campo de velocidades expresadas arriba, Navier-Stokes en  $\hat{r}$  da

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} ,$$

y para  $\hat{\theta}$  tenemos

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} .$$

La última ecuación permite hallar  $v_\theta$  y una vez conocido el campo de velocidades es posible reemplazar  $v_\theta$  en la ecuación anterior para hallar el campo de presiones. Podemos proponer una solución de la forma  $v_\theta(r) = Ar^n$ , lo que nos lleva a la ecuación indicial  $n^2 - 1 = 0$  con soluciones  $n = \pm 1$ . Por lo tanto el campo de velocidades tiene la forma

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} ,$$

y usando las condiciones de contorno

$$v_\theta(r = a) = a\Omega_1 \quad , \quad v_\theta(r = b) = b\Omega_2 \quad ,$$

encontramos la solución para el campo de velocidades

$$v_\theta(r) = \frac{r}{b^2 - a^2}(b^2\Omega_2 - a^2\Omega_1) + \frac{a^2b^2}{r(b^2 - a^2)}(\Omega_1 - \Omega_2) \quad .$$

En el problema también piden que busquemos la forma funcional del torque que el fluido ejerce a cada cilindro por análisis dimensional. Como este es un tema aún no abordado en la clase teórica, resolvamos analíticamente para el cilindro interno. La cupla que el fluido realiza sobre el cilindro interno estará dada por

$$\vec{N}_1 = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} a\hat{r} \times (-\bar{\sigma}|_{r=a} \cdot (-\hat{r})) a d\theta dz \quad .$$

Buscando en el apunte teórico las expresiones para el tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\bar{\sigma}|_{r=a} \cdot \hat{r} = \sigma_{\theta r}|_{r=a} \hat{\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=a} \hat{\theta} = \frac{2\mu b^2}{b^2 - a^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \hat{\theta} \quad .$$

Con este resultado, la cupla que el fluido realiza sobre el cilindro interior es

$$\vec{N}_1 = \frac{4\pi\mu a^2 b^2 \ell}{b^2 - a^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \hat{z} \quad .$$