Estructura de la Materia 1 – Práctica 6

En esta guía estudiamos las ondas que se generan en la superficie libre de un fluido o en la interfase entre dos fluidos no miscibles, donde la fuerza restitutiva está dada por un campo gravitatorio uniforme. La interfase aire-líquido o entre dos líquidos no miscibles es plana, vamos a considerar las ondas de baja amplitud que se generan ante una perturbación externa que se manifiestan ostensiblemente en la interfase, pero que en rigor de verdad se extienden a todo el fluido. Siendo un fenómeno dependiente del tiempo, el balance entre fuerzas generadoras de movimiento es el debido a una competencia entre el gradiente de presiones y la gravedad. Entonces si a es la amplitud de la onda y λ su longitud característica, el límite de baja amplitud corresponde a $a \ll \lambda$. Tenemos la ecuación de Euler, es decir la ecuación de evolución de un fluido ideal

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \quad .$$

Veamos que los dos términos que involucran a la velocidad son de diferente orden en el caso que estamos considerando. Por un lado tenemos que la velocidad típica será $U \sim a/\tau$, siendo τ el período de oscilación de la perturbación, mientras que la longitud típica en la que se produce variación en la velocidad de los elementos de fluido es λ, la longitud de onda de la perturbación. De lo dicho se desprende que

$$\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \sim \frac{U}{\tau} \sim \frac{a}{\tau^2} \quad , \quad \left|(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right| \sim U\,\frac{U}{\lambda} \sim \frac{a^2}{\lambda\tau^2} \Longrightarrow \left|\frac{(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}\right| \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad ,$$

por lo que podemos despreciar el término convectivo. Vemos además que si consideramos incompresibilidad la ecuación de Euler nos dice que si el flujo es inicialmente irrotacional continuará siéndolo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) \quad ,$$

donde tomamos el eje z en dirección de la vertical. Según el teorema de Bernoulli para fluidos irrotacionales

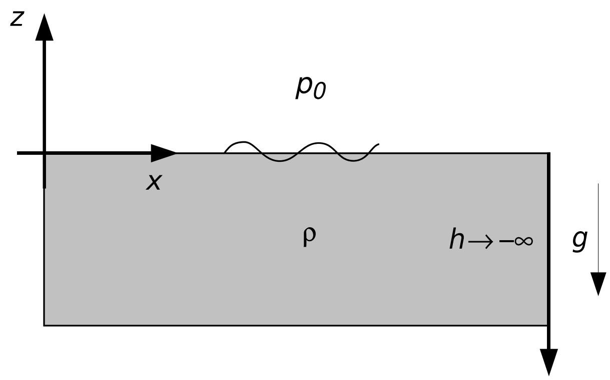
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C(t) \quad ,$$

siendo ϕ el potencial de velocidades. Por un lado $C(t)$ puede absorverse dentro del potencial ϕ sin afectar la dinámica del fluido, y por otro veamos que el término con v^2 puede despreciarse frente a $\partial_t \phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \sim \frac{\lambda U}{\tau} \sim \frac{a\lambda}{\tau^2} \quad , \quad v^2 \sim U^2 \sim \frac{a^2}{\tau^2} \Longrightarrow \frac{v^2}{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad .$$

Entonces el teorema de Bernoulli adopta la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad .$$



Consideremos el caso de un fluido en contacto con aire a presión p_0, y sea $z = \zeta(x, t)$ la interfase entre el fluido y el aire (consideramos simetría de translación en $\hat{y}$), según Bernoulli tendremos

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad ,$$

y podemos incorporar la constante p_0/ρ en el potencial de forma tal que obtenemos para la forma de la interfase

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} \quad ,$$

donde debemos notar que esta es una ecuación implícita para $\zeta(x, t)$ que no nos permitiría calcularla aún conociendo la forma de ϕ. Si queremos continuar con un tratamiento analítico, aproximamos la evaluación del término derecho tomando $\partial_t \phi|_{z=0}$, por lo que se obtiene para la interfase

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=0} \quad .$$

Ahora concentrémosnos en el potencial de velocidades, a partir de la incompresibilidad del fluido

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \Longrightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad ,$$

vemos que el potencial satisface la ecuación de Laplace. Ahora traducimos a una condición exclusivamente sobre el potencial la condición que obtuvimos para la interfase, derivándola respecto del tiempo

$$g\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} = 0 \quad ,$$

y considerando que

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = v_z|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\zeta \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad ,$$

donde usamos en el último paso que $(\vec{v}.\vec{\nabla})\zeta/\partial_t \zeta \sim a/\lambda \ll 1$, llegamos a

$$\left(g\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \quad .$$

Esta última es la condición de contorno que debe cumplir el potencial de velocidades en la interfase líquido-aire.

Problema 4

En este ejercicio tenemos dos fluidos no miscibles en contacto, el fluido superior tiene densidad ρ' y profundidad h' y está en contacto con la atmósfera. El fluido inferior tiene densidad ρ y profundidad h (que eventualmente puede ser infinita). Para cada fluido vamos a tener sendos potenciales ϕ' y ϕ y elegimos que la interfase entre los mismos corresponda a $z = 0$.

i) Cada uno de los fluidos es incompresible e irrotacional, por lo que sus potenciales de velocidad satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi' = 0 \quad , \quad \nabla^2\phi = 0 \quad .$$

Para el fluido superior en contacto con la atmósfera debe cumplrse la condición de contorno que ya dedujimos, con la única salvedad de que ahora la interfase está en $z = h'$ en lugar de en $z = 0$, por lo que tendremos

$$\left(g\frac{\partial\phi'}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} \right)_{z=h'} = 0 \quad .$$

En la interfase entre los dos líquidos podemos también plantear la continuidad de la presión usando el teorema de Bernoulli

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \Longrightarrow p = -\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz\right) \quad ,$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \frac{p}{\rho'} + gz = 0 \Longrightarrow p = -\rho'\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t} + gz\right) \quad ,$$

por lo que planteando la igualdad de presiones en la interfase nos da

$$\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz\right)\Bigg|_{z=\zeta} = \rho'\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t} + gz\right)\Bigg|_{z=\zeta} \quad .$$

Derivando esta última expresión respecto del tiempo, aproximando $\partial_t\zeta \approx v_z|_{z=\zeta} = \partial_z\phi|_{z=\zeta} = \partial_z\phi'|_{z=\zeta}$, donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la continuidad de la componente vertical de la velocidad en la interfase, llegamos a la condición

$$\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} \right]\Bigg|_{z=\zeta} \quad ,$$

y en un último paso aproximamos la evaluación en la interfase por la evaluación en $z = 0$

$$\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} \right]\Bigg|_{z=0} \quad .$$

ii) Supongamos que h es finito, por lo que en $z = -h$ tenemos un contorno sólido, en ese caso debemos pedir que la componente vertical de la velocidad se anule, es decir

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \quad .$$

Por el contrario, si $h \to \infty$ la condición a pedir será

$$\lim_{z \to -\infty} \phi(z) = 0 \quad .$$

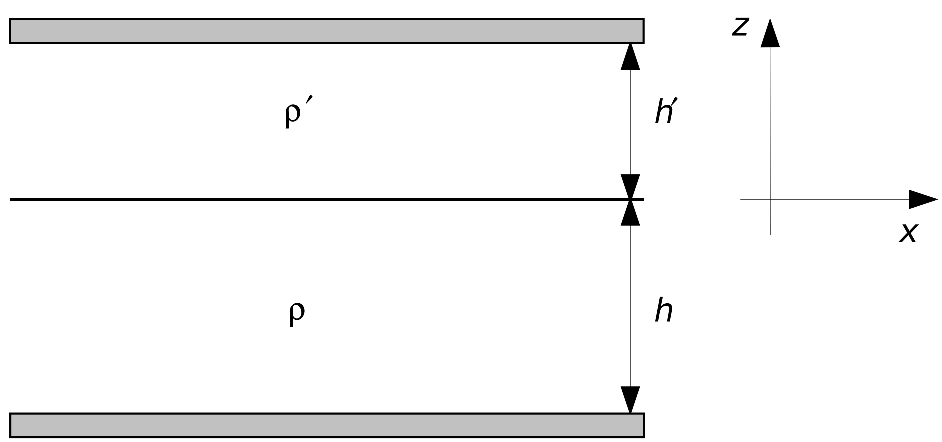
iii) La condición para la interfase aire-líquido que ahora denominamos $z = \eta(x,t)$ la obtuvimos anteriormente cuando esa interfase estaba alrededor de $z = 0$, sólo que ahora se ubica en $z = h'$

$$\eta(x,t) = -\frac{1}{g} \left.\frac{\partial \phi'}{\partial t}\right|_{z=h'} \quad .$$

La interfase líquido-líquido que llamamos $z = \zeta(x,t)$ la podemos obtener de la relación correspondiente a la igualdad de presiones en la interfase, simplemente despejando $\zeta(x,t)$ de esa expresión

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g(\rho-\rho')} \left.\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho' \frac{\partial \phi'}{\partial t}\right)\right|_{z=0} \quad .$$

Problema 5



i) Nos piden la relación de dispersión para las ondas de gravedad que se propagan en la interfase entre los dos fluidos con la configuración de la figura. Proponemos para ϕ y ϕ' la forma

$$\phi(x,z,t) = f(z)\cos(kx - \omega t) \quad ,$$

$$\phi'(x,z,t) = g(z)\cos(kx - \omega t) \quad .$$

Para que se satisfaga la ecuación de Laplace $f(z)$ y $g(z)$ deben ser de la forma

$$f(z) = A\,e^{-kz} + B\,e^{kz} \quad , \quad g(z) = C\,e^{-kz} + D\,e^{kz}$$

Para que se cumplan las condiciones de contorno de que v_z sea nula en h' y en $-h$ directamente planteamos

$$f(z) = A\cosh[k(z+h)] \quad , \quad g(z) = C\cosh[k(z-h')] \quad .$$

También deben verificarse las condiciones de empalme

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right|_{z=0} \Longrightarrow A\sinh(kh) = C\sinh(-kh') \quad ,$$

$$\left.\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2}\right]\right|_{z=0} = 0 \Longrightarrow g(\rho-\rho')Ak\sinh(kh) - \rho\omega^2 A\cosh(kh) + \rho'\omega^2 C\cosh(kh') = 0$$

Buscamos la relación de dispersión pidiendo que el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones se anule

$$\begin{vmatrix} \sinh(kh) & \sinh(kh') \\ g(\rho-\rho')k\sinh(kh) - \rho\omega^2\cosh(kh) & \rho'\omega^2\cosh(kh') \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

de lo cual se obtiene

$$\omega^2 = \frac{gk(\rho-\rho')}{\rho\,\mathrm{cotgh}(kh) + \rho'\,\mathrm{cotgh}(kh')} \quad ,$$

que en general corresponde a ondas dispersivas.

ii) Consideramos el caso $kh, kh' \gg 1$, tendremos que

$$\lim_{kh\to\infty} \mathrm{cotgh}(kh) = 1 \quad , \quad \lim_{kh'\to\infty} \mathrm{cotgh}(kh') = 1 \quad ,$$

de forma tal que

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho-\rho')}{\rho+\rho'} \quad ,$$

que si bien es una expresión más simple que la que teníamos sigue dando ondas dispesivas.

iii) Ahora tenemos el otro límite, $kh, kh' \ll 1$, el denominado límite de ondas largas, en este caso $\mathrm{cotgh}(kh') \approx 1/(kh')$ por lo que resulta para ω

$$\omega^2 = \frac{k^2 g(\rho-\rho')hh'}{h'\rho + h\rho'} \quad ,$$

que corresponde a ondas no dispersivas.