Estructura de Materia 1

Primer Cuatrimestre 2021

Práctica 1
Cinemática e Hidrostática

Problema 1. Descripciones euleriana y lagrangiana

Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = f(z),$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

Problema 2.

Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right),$$

donde T_0, α, L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante U.

(i) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geométricamente las componentes de la derivada total.

(ii) Repita el punto (i) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

Problema 3. Trayectorias, líneas de corriente y líneas de trazas

Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:

(i) Una corriente uniforme $\mathbf{u}(x, t) = U\hat{x}$.

(ii) Una fuente lineal de caudal constante $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.

(iii) Un torbellino con circulación constante $\mathbf{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.

(iv) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.

(v) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ.

Problema 4.

Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t}, \qquad v_y(x, y, t) = c,$$

donde α, β y c son constantes con las dimensiones apropiadas. Grafique las distintas líneas en dos casos distintos:

(I) $\alpha = \beta$,

(II) $\alpha = 2\beta$.

Problema 5.

Una esfera se halla completamente inmersa en un fluido. La misma posee radio R_0 a $t = 0$ y se expande para $t > 0$ de acuerdo a la ley:

$$R = R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Encuentre dicha ley sabiendo que para $t > 0$ y $r > R(t)$, la velocidad de las partículas de fluido es $v_r(r) = v_0 R_0^2 / r^2$.

Problema 6. Deformación de una partícula de fluido

Calcule las deformaciones longitudinales, de corte y volumétricas para los flujos del problema 3.

Problema 7. Vector 'remolino'

Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la vorticidad es $\vec{\omega} = 2\,\vec{\Omega}$.

Problema 8. Cálculo de la vorticidad

Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

(I) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$,

(II) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$,

(III) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}\right]$,

(IV) $v_x = v_0 y / L$.

Problema 9.

Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

(I) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.

(II) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección $\hat{z}$.

(iii) Idem (ii) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano (x, y) y contiene al origen, es el mismo.

Problema 10. Simetrías

Muestre que la ecuación de Euler posee las siguientes simetrías:

1. Traslaciones espaciales del tipo $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (t, \vec{r} + \vec{R}, \vec{u})$, siendo $\vec{R}$ un vector fijo en el espacio tridimensional.
2. Traslaciones temporales del tipo $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (t + \tau, \vec{r}, \vec{u})$ con τ un número real.
3. Transformaciones galileanas: $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (t, \vec{r} + \vec{U}t, \vec{u} + \vec{U})$, con $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$.
4. Rotaciones: $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (t, A\vec{r}, A\vec{u})$, con $A \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.
5. Transformaciones de paridad: $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (t, -\vec{r}, -\vec{u})$.
6. Transformaciones de escala: $(t, \vec{r}, \vec{u}) \mapsto (\lambda^{1-\alpha}t, \lambda\vec{r}, \lambda^{\alpha}\vec{u})$, con $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe alguna restricción sobre el valor de α? Piense qué consecuencia física tiene este hecho.

En todos los casos, piense cómo transforma la presión.
Para reflexionar: se podría pensar que todas estas simetrías no son más que una manifestación (o una consecuencia, si se quiere) macroscópica de las simetrías ya presentes en las ecuaciones de Newton que gobiernan, en la aproximación clásica, el movimiento microscópico del fluido. Es esto cierto?

Problema 11. Taquímetro hidrostático

Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω.

(i) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?

(ii) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?

(iii) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si $R = 5$ cm, $H = 7{,}5$ cm, $g = 9{,}8$ m/s^2? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.

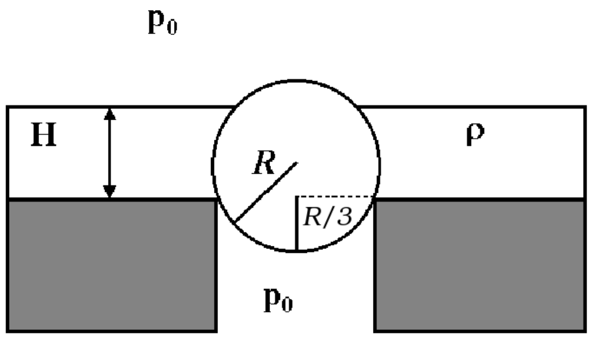
(iv) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (iii), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:

   (a) En reposo;
   (b) Cuando el recipiente rota con frecuencia $\nu = 90$ rpm.

(v) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

Problema 12. Tapón de pileta

Una esfera sólida de densidad σ uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad ρ, en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura H desde el fondo de la pileta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:



(I) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (tenga en cuenta que el líquido puede tapar o no totalmente a la esfera).

(II) Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.

(III) Si $\sigma = \alpha\rho$, verifique que el valor mínimo de α para el cual se obtiene obturación para todo H es $\alpha = 8/27$.

Problema 13. Modelo de ciclón

Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio a, que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$. Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en $r = a$, donde r es la coordenada radial cilíndrica con el eje z coincidente con el eje del núcleo.

(I) Determine el campo de velocidades para todo valor de r.

(II) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo r, en función de la presión muy lejos del eje p_∞. Encuentre qué condición debe satisfacer Ω respecto del valor de la presión p_∞.

Problema 14. Placa plana en el seno de un fluido

Una placa plana delgada se encuentra sumergida completamente en un fluido estático de densidad ρ, de manera que forma un ángulo α con la horizontal. Asuma que la placa tiene una superficie S y que su espesor es despreciable (es decir que, a todos los efectos prácticos, la placa es simplemente una superficie). La forma de dicha superficie es arbitraria (y desconocida). En estas condiciones,

(I) Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las (dos) caras de la placa. *Sugerencia:* utilice un sistema de coordenadas con origen en S y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.

(II) Elija un sistema de coordenadas centrado en el centro de masa de la placa. Al calcular el punto de aplicación de la fuerza, suponga que la placa tiene una densidad superficial uniforme σ y exprese el resultado en función de los momentos de inercia de la placa.

Problema 15.

El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.

(I) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen $\mathbf{F} = g\hat{z}$, determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en $z = 0$ es $\rho = \rho_0$.

(II) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \to \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2 \times 10^9$ N/m^2, $\rho_0 = 1000$ Kg/m^3) (desprecie la presión en la superficie).

(III) Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado $p = \rho RT/m$, con R la constante universal de los gases y m la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas $\mathbf{F} = -g\hat{z}$, la presión a una altura z está dada por

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{mg}{R}\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}\right\}.$$

(IV) Muestre que si T depende de x, y y z no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

Problema 16. MODELO SIMPLIFICADO DE LA ATMÓSFERA TERRESTRE

Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura z sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores p_0, ρ_0 y T_0 respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación $p\rho^{-\gamma} = cte.$ (atmósfera adiabática).

Problema 17. ESTRELLAS AUTOGRAVITANTES

Este problema tiene como objetivo modelar la estructura básica de una estrella. Para ello, pensemos que la estrella se compone de una masa de fluido auto-gravitante cuyos elementos se encuentran en equilibrio hidrostático, la presión evitando que la atracción gravitatoria los lleve al colapso. Asumiremos que la configuración posee simetría esférica.

(I) Muestre que, para el fluido que compone la estrella, la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{GM(r)}{r^2}\,\hat{r},$$

siendo $M(r) = \int_0^r \rho\, 4\pi r^2\, dr$ y $\hat{r}$ el versor radial en coordenadas esféricas. *Ayuda:* puede resultarle útil recordar que un cascarón esférico de densidad de masa uniforme no ejerce fuerza gravitatoria sobre un punto interno (este resultado, de demostración sencilla, es un teorema debido a Newton).

(II) Asuma una ecuación de estado politrópica para el gas que compone la estrella, de forma tal que $p = K\rho^{(n+1)/n}$, siendo n el índice politrópico y K una constante. Obtenga una ecuación diferencial para el campo de densidad de la estrella (pero no la resuelva aún).

(iii) A fin de simplificar la resolución, proponga la siguiente adimensionalización de las variables:

$$r = a\xi,$$
$$\rho = \rho_c \theta^n,$$

introduciendo la coordenada radial adimensional ξ y la función adimensional $\theta(\xi)$ que representa la densidad de masa normalizada por su valor en el centro de la estrella, ρ_c. En término de estas nuevas variables, derive una ecuación diferencial para $\theta(\xi)$. Simplifique la expresión que obtuvo elegiendo $a^2 = K(n+1)/(4\pi G \rho_c^{1-1/n})$. .

(iv) Mediante argumentos físicos, determine cuáles son las (dos) condiciones de contorno sobre $\theta(\xi)$.

(v) Asumiendo que dispone de una solución $\theta(\xi)$ a la ecuación, responda qué condición física emplearía para determinar el radio R de la estrella. Encuentre una expresión para la masa total de la estrella, M, y otra para el radio R de la misma.

(vi) Opcional: La ecuación que obtuvo en el inciso (iii) se conoce como ecuación de Lane-Emden, y sólo tiene soluciones analíticas en los casos particulares correspondientes a $n = 0, 1$ y 5. Para otros valores de n, la ecuación diferencial debe integrarse numéricamente. En esta notebook de Google Colaboratory encontrará la solución numérica a la ecuación para distintos valores de n. Emplee la notebook para verificar que estrellas con índice politrópico $n < 5$ poseen un radio finito.

Problema 18. Enanas Blancas

Las enanas blancas son remanentes de los núcleos de estrellas gigantes que colapsaron, en las que sólo la presión de degeneración electrónica evita su colapso a un agujero negro.

Un gas de electrones (en estados) degenerados responde a una ecuación de estado politrópica con $n = 3/2$ en el caso no-relativista, y otra en el límite ultra-relativista, en el cual $n \to 3$. Para un gas de electrones degenerados relativistas, la ecuación de estado es

$$p = \frac{1}{4}\hbar c (3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3},$$

donde n_e es la densidad numérica de electrones, $\hbar$ es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz en el vacío. La densidad total ρ se vincula con el número de electrones mediante $\rho = n_e \mu_e m_p$, donde m_p es la masa del protón y μ_e es el peso molecular promedio por electrón en unidades de la masa del protón, y en general depende de la composición química de la estrella. Un valor típico es $\mu_e = 2$.

En estas condiciones, y basándose en los resultados obtenidos en el Problema 17, muestre que existe un límite superior para la masa de una enana blanca y exprese dicha masa crítica, M_{Ch}, denominada *masa de Chandrasekhar*, en términos de la masa del sol; $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg.