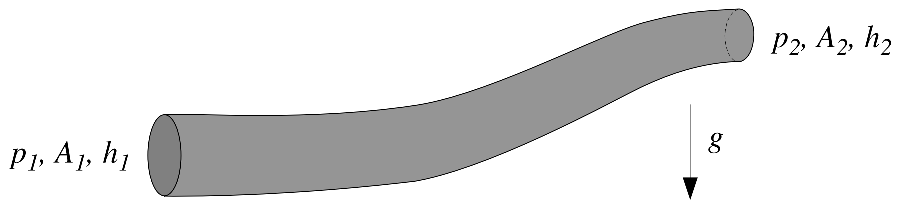
Estructura de Materia 1

Primer Cuatrimestre 2021

Práctica 2
Leyes de conservación

Problema 1.

Un líquido incompresible de densidad ρ_0 fluye de manera estacionaria por el interior de un conducto de longitud finita y sección variable. En la figura, p_1, A_1 y h_1 denotan la presión, el área y la altura a la que se encuentra uno de los extremos del conducto, mientras que p_2, A_2 y h_2 corresponden al otro extremo. Los extremos 1 y 2 están localizados en regiones del conducto en donde la sección es razonablemente uniforme, así que las velocidades v_1 y v_2 pueden considerarse aproximadamente uniformes sobre toda la sección y paralelas al conducto.



(i) Aplicando el teorema de Bernoulli que corresponda, y suponiendo que $A_1 > A_2$, obtenga una expresión para el caudal en función de los datos dados en los extremos del tubo.

(ii) ¿Cuál es la condición para que exista flujo?

(iii) Observe que a partir de lo hallado en (a) no existe ninguna restricción acerca del sentido de movimiento (este es impuesto por las condiciones iniciales, y los detalles constituyen un problema no estacionario). Suponga que el movimiento se da desde el extremo 1 al 2. ¿Puede haber flujo aún cuando $h_1 < h_2$?

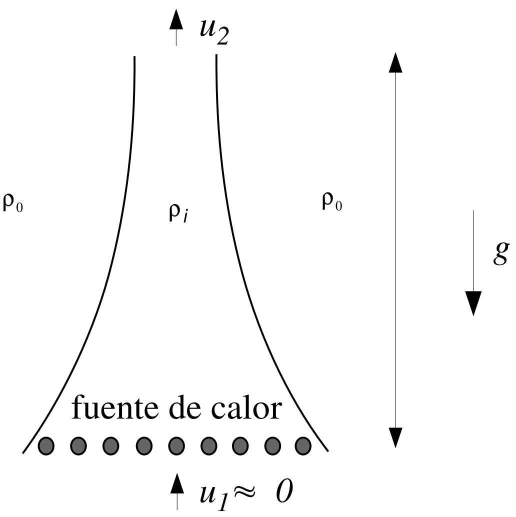
(iv) En el caso en que $A_1 = A_2$, ¿cuál es la condición para que haya flujo estacionario?

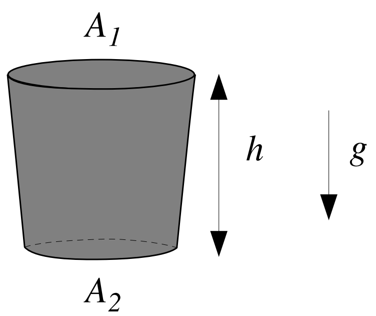
Problema 2. Modelo simplificado de chimenea

Un modelo simplificado de chimenea supone que en el interior de la misma hay un fluido de densidad ρ_i que es calentado por una fuente de calor situada en la parte inferior, rodeada exteriormente por una atmósfera de densidad ρ_0, con $\rho_0 > \rho_i$. Para una chimenea idealizada sin fricción, encuentre la velocidad de salida v_2 en términos de ρ_0, ρ_i, g y h suponiendo que el flujo es estacionario.

Problema 3. Desagote de un embudo - Clepsidra

Un recipiente con forma de embudo y simetría axial contiene un líquido incompresible. A $t = 0$ se abre la tapa inferior dejándoselo fluir, mientras que al mismo tiempo se va agregando el mismo líquido por la tapa superior, de tal manera de mantener constante el nivel. Cuando la inclinación de las paredes respecto de la vertical es pequeña, se puede obtener una solución aproximada del problema despreciando las componentes horizontales de la velocidad. Suponga que la variación es lineal, de la forma $A_1 = (1 + \varepsilon z/h)A_2$ ($\varepsilon \ll 1$).





(I) ¿Cuál es la velocidad de salida en la tapa inferior como función del tiempo?

(II) ¿Se llega a un régimen estacionario?

Problema 4.

Un gas ideal se escapa adiabáticamente a través de un pequeño agujero en un recipiente. Determine la velocidad de salida si la presión es p en el interior del recipiente y p_0 en el exterior.

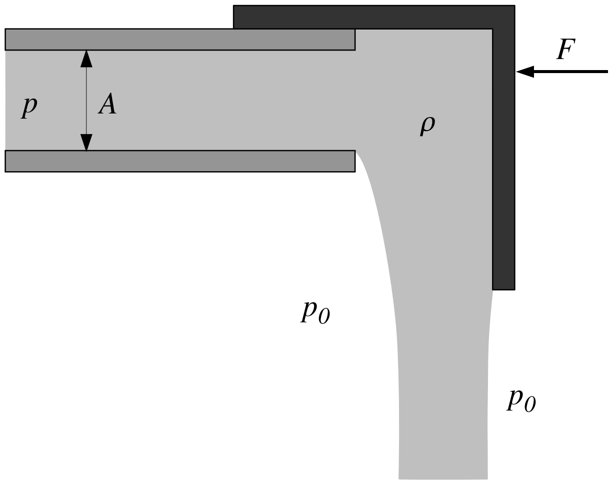
Problema 5.

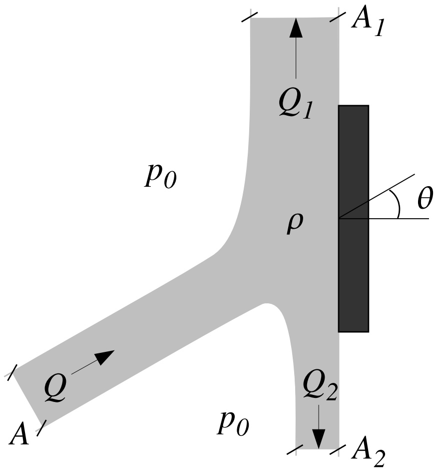
Si se interrumpe el extremo de un tubo muy largo con una tapa deslizante como se muestra en la figura, determine el caudal Q del líquido ideal e incompresible con los datos indicados.

Problema 6. Fuerza ejercida por un jet sobre una placa plana

Un chorro de líquido incompresible de caudal Q y sección A incide sobre una placa plana. El fluido puede ser considerado ideal y no actúan fuerzas externas. Tenga en cuenta que la presión del fluido es la atmosférica en zonas suficientemente alejadas de la interacción con la placa.

(I) ¿Qué fuerza debe aplicarse sobre la placa para que ésta permanezca en equilibrio?



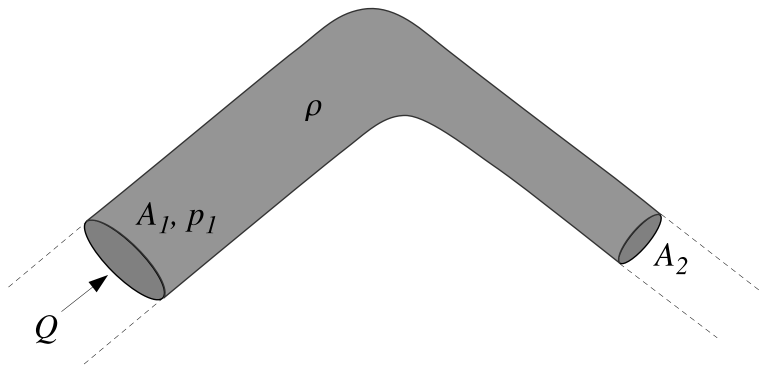


(II) Hallar Q_1 y Q_2 como función de Q y de θ.

(III) Calcule para $\theta = 30°$, $Q = 10$ l/s, $A = 100$ cm^2 y $\rho = 1$ g/cm^3.

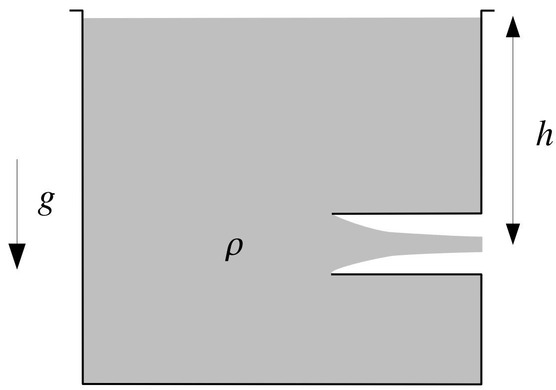
Problema 7. TUBERÍA EN CODO

Determine la fuerza que el líquido, considerado ideal, ejerce sobre la cañería muy extensa doblada en ángulo recto como se indica en la figura.



Problema 8. Embocadura de Borda

De un tanque como el de la figura fluye un líquido incompresible hacia el exterior a través de una embocadura situada a una profundidad h respecto de la superficie libre. La embocadura penetra profundamente en el interior del tanque (este tipo de embocadura es la llamada *de Borda*). El tanque es lo suficientemente grande como para que pueda considerarse $v \approx 0$ en la superficie libre. Como consecuencia, prácticamente tampoco se registra movimiento en las paredes laterales y entonces en esa zona la presión es la hidrostática.



(i) Muestre que la velocidad de salida es la dada por la fórmula de Torricelli $v_s = (2gh)^{1/2}$.

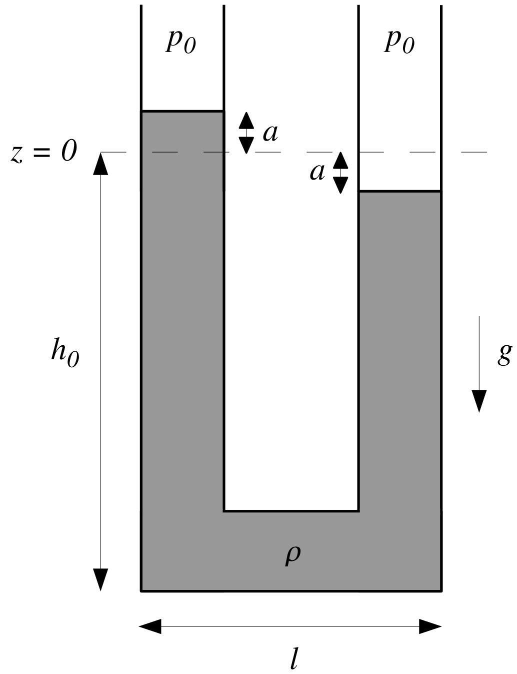
(ii) Aplicando el teorema de la cantidad de movimiento estime la relación entre la sección final del chorro ("vena contracta") y el área de la embocadura. Este coeficiente se llama *coeficiente de contracción.*

Problema 9.

Determine la ecuación de movimiento de las superficies de las columnas de líquido de la figura, y resuelva para las condiciones iniciales indicadas, suponiendo nulo el campo de velocidades inicial del líquido.

Problema 10.

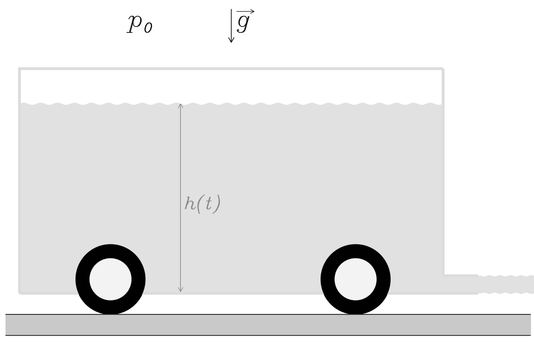
Se tiene un depósito móvil abierto superiormente con un líquido de densidad ρ en su interior el cual a $t = 0$ tiene una profundidad h_0. El depósito se mueve hacia la izquierda a velocidad



constante (existe fricción entre las ruedas y el suelo) y deja escapar líquido por un orificio de sección $A_s \ll A$, siendo A el área de la base del depósito.

(I) Asumiendo un régimen cuasiestacionario, encuentre la variación temporal del nivel del líquido en el depósito.

(II) Halle la fuerza de fricción entre las ruedas y el suelo en función del tiempo.

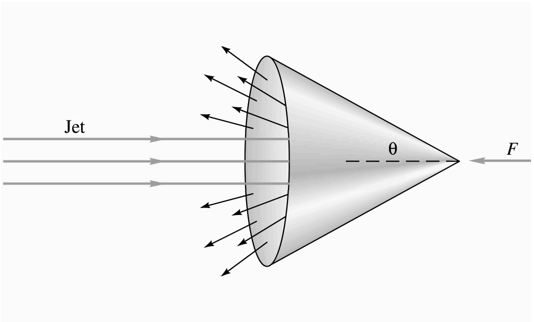


Problema 11.

Un chorro (jet) de líquido con densidad ρ uniforme y constante, de diámetro D y velocidad de módulo V impacta en una cavidad cónica de apertura θ y se deflecta en la forma de una lámina cónica según ilustra la figura.

(I) Encuentre el grosor de la lámina cónica de líquido como función de la distancia al vértice del cono.

(ii) Encuentre la fuerza F que debe ejercerse sobre el cono para que la configuración permanezca en reposo.



Problema 12. Flujos rotantes

En flujos rotantes, resulta conveniente escribir la ecuación de Euler desde el marco de referencia en rotación, en lugar de hacerlo desde un referencial inercial o de laboratorio.

(i) Muestre que en el marco de referencia rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la ecuación de Euler resulta

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_R - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{f},$$

donde $\vec{f}$ representa las fuerzas externas y p_R es la presión reducida. Qué forma tiene esta última función?

(ii) Considere ahora el caso de un flujo estacionario, incompresible e ideal de un fluido en un marco de referencia rotante en ausencia de fuerzas externas. Suponga además que la frecuencia de rotación es tal que los efectos del término no lineal en la ecuación dinámica son despreciables frente a los del término de Coriolis. En ese límite, muestre que el flujo es bidimensional en el plano perpendicular al vector velocidad angular $\vec{\Omega}$.

Problema 13. Helicidad

La helicidad de un volumen V de fluido se define como

$$H = \int_V \vec{u} \cdot \vec{\omega}\, dV.$$

(i) Muestre que, si las líneas de vorticidad se cierran en V y el flujo es ideal, H es un invariante del movimiento. *Ayuda:* obtenga primero una expresión para la variación temporal total del integrando, $\vec{u} \cdot \vec{\omega}$.

(ii) Considere una región de fluido en la cual hay dos tubos de vorticidad delgados, ligados entre sí como se muestra en la Figura (debajo de estas líneas). Para esta configuración calcule la helicidad neta y muestre que $H = \pm 2\Phi_1\Phi_2$, donde Φ_1 y Φ_2 son los flujos de vorticidad en cada tubo.