

Resolución primer parcial

Estructura de la Materia 1 - Primer cuatrimestre de 2021 - Cátedra Pablo Cobelli

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del primer parcial de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial.**
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Problema 1

Antes de pasar a la resolución concreta del problema es bueno notar que tenemos una configuración que es como la planteada en el problema 11 de la Práctica 1 (Taquímetro Hidrostático, resuelto en las [clases prácticas](#)) donde se ha variado la condición de contorno, en lugar de tenerse una superficie libre expuesta a la presión atmosférica se tiene una superficie en contacto con un contorno sólido que no la deja deformarse. Es por ello que al plantearse la ecuación de Euler, veremos que se obtiene para la presión la misma forma funcional que se obtuvo en el problema referido, pero al variar las condiciones de contorno la constante de integración será otra.

a) Nos paramos en el sistema que rota con el cilindro, desde allí vemos el fluido quieto y planteamos la ecuación básica de la hidrostática. Considerando que estamos en un sistema no inercial, debemos incluir la fuerza centrífuga (coordenadas cilíndricas con eje azimutal en el eje de rotación)

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \hat{z} - \rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\rho g \hat{z} + \rho \Omega^2 r \hat{r} \implies \vec{\nabla} \left(p + \rho g z - \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \right) = 0 \quad .$$

Por lo que obtenemos para la presión (igual que en el ejercicio 11 de la práctica 1)

$$p(r, z) = \rho \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} - g z \right) + C \quad ,$$

donde C es una constante a determinar. Para determinarla pedimos que la presión del fluido integrada sobre la tapa debe sostenerla y soportar además la presión ambiente actuando sobre la cara superior de la misma. Si elegimos el nivel $z = 0$ en el fondo del recipiente tendremos

$$Mg + p_0 \pi a^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a p(r, z = L) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\rho \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} - gL \right) + C \right] r dr d\theta \quad .$$

De aquí se obtiene

$$C = \frac{Mg}{\pi a^2} + p_0 + \rho \left(gL - \frac{\Omega^2 a^2}{4} \right) \implies p(r, z) = p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} + \rho \left[g(L - z) + \frac{\Omega^2}{2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \right] \quad .$$

Esta configuración será posible hasta algún valor límite de la velocidad angular de rotación Ω , más allá del cual el fluido se elevará por encima del nivel L en los bordes (elevando la tapa) y se deprimirá en el centro. Para hallar el valor Ω_{cr} , correspondiente a la velocidad angular crítica, notemos que en $(r, z) = (0, L)$ tenemos el punto de mínima presión, para la cual debemos pedir $p(0, L) \geq 0$. Justamente la condición $p(0, L) = 0$ nos dará el valor crítico que buscamos

$$p(0, L) = 0 \implies p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} - \frac{\rho \Omega_{cr}^2 a^2}{4} = 0 \implies \Omega_{cr} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{MG}{\pi a^2} + p_0 \right)} \quad .$$

b) En este ítem debemos integrar la presión sobre la superficie de la esfera. De todos los términos que entran en la presión los únicos que contribuyen son los no constantes. Para el término “gravitatorio” ($-\rho g z$) no necesitamos hacer ninguna cuenta, aporta una cantidad igual al peso del volumen de

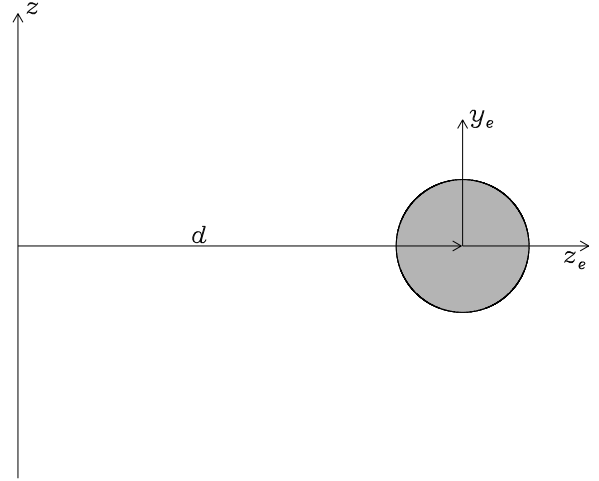
líquido desalojado en \hat{z} (como la esferita está totalmente sumergida podemos usar el principio de Arquímedes).

Para el término “centrífugo” ($\rho\Omega^2 r^2/2$) no nos queda otra que hacer la cuenta. Es útil definir un nuevo referencial con origen en el centro de la esferita (usamos el índice e para las coordenadas en este referencial), podemos elegir el eje z_e apuntando en la dirección radial del referencial anterior, como se indica en la figura.

En este referencial, donde x_e es entrante en el plano de la hoja, vemos que la distancia al eje de rotación, llamémosla ℓ , va a estar dada por

$$\ell^2 = (d + z_e)^2 + x_e^2 = (d + R_e \cos \theta)^2 + (R_e \cos \varphi \sin \theta)^2 \quad ,$$

donde en el último paso consideramos que integraremos sobre la superficie de la esferita, por lo que expresamos en coordenadas esféricas y nos situamos sobre la superficie (notar que ℓ es independiente de y_e).



Ahora veamos cómo nos queda expresada la integral que nos da la fuerza correspondiente a este término “centrífugo”, que llamaremos \vec{F}_c

$$\vec{F}_c = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho\Omega^2}{2} \ell^2 \hat{r}_e R_e^2 \sin \theta d\varphi d\theta = - \frac{\rho\Omega^2}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(d + R_e \cos \theta)^2 + (R_e \cos \varphi \sin \theta)^2] R_e^2 \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta \hat{z}_e \quad ,$$

en la última igualdad hemos usado que por simetría las integrales en \hat{x}_e y en \hat{y}_e se anulan. Las integrales con $\cos \theta \sin \theta$, $\cos^3 \theta \sin \theta$ y $\cos \theta \sin^3 \theta$ se anulan, el único término que sobrevive es el que involucra a $\cos^2 \theta \sin \theta$ (que tiene a $2dR_e^3$ como factor), por lo que se tiene para el aporte centrífugo

$$\vec{F}_c = - \frac{4}{3} \pi \rho \Omega^2 R_e^3 d \hat{z}_e \quad .$$

La fuerza total instantánea sobre la esferita, será en definitiva (en coordenadas cilíndricas)

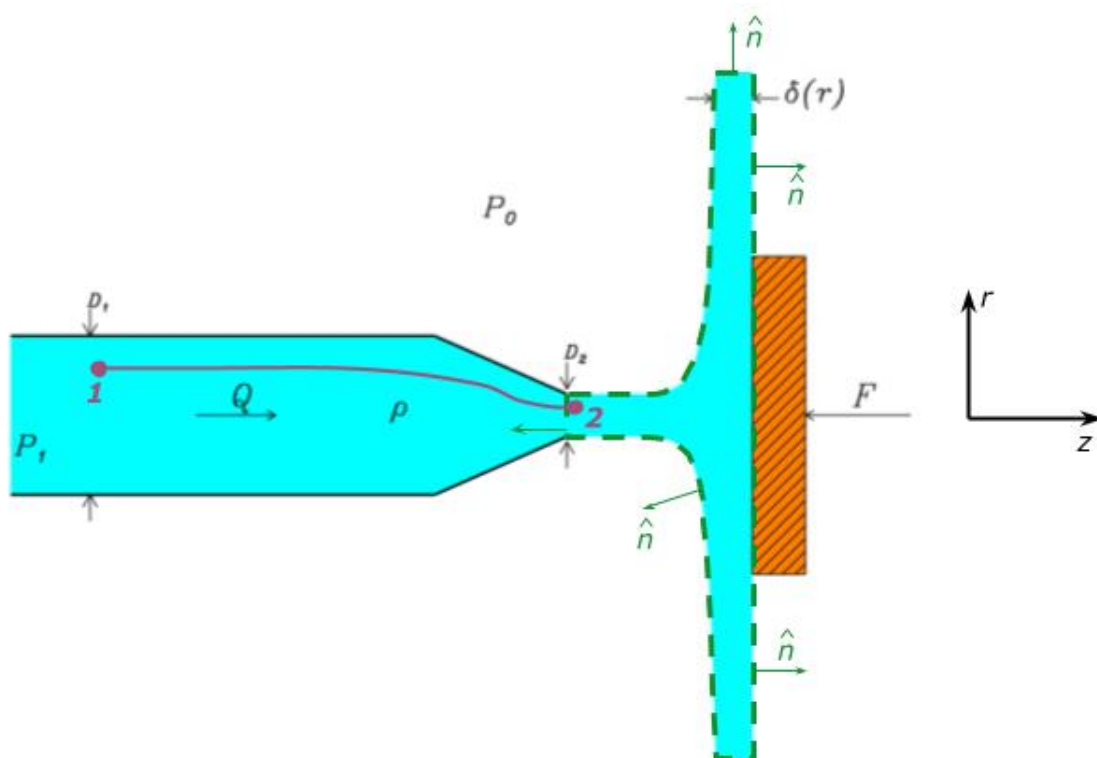
$$\vec{F} = \frac{4}{3} \pi \rho R_e^3 (g \hat{z} - d \Omega^2 \hat{r}) \quad .$$

Puede decirse que si la orientación elegida de los ejes en la esferita hubiera sido diferente (por ejemplo z_e en la dirección vertical, y_e horizontal, etc.) las integrales a calcular hubieran tenido un grado de dificultad similar a las que calculamos.

Como comentario final sobre este ítem, diremos que si bien las integrales que se calcularon no implican dificultad especial para su resolución, en el enunciado del parcial se dejó abierta la posibilidad de que no se las calculara explícitamente, si no que se dijera únicamente cuáles componentes de la fuerza eran no nulas y cuál era el sentido de las mismas.

Este ejercicio se resuelve con algunas de las leyes de conservación vistas en la clase teórica del 14/4, que además fueron aplicadas en varios problemas en la clase práctica del 16/4 y el apunte correspondiente a este eje temático. Dichos contenidos son necesarios para resolver la Guía 2 en casi su totalidad, si bien en esta se debe también emplear otra conservación que para este problema no será necesaria por el escenario planteado.

Problema 2



a) En la Figura se incluyó un sistema de coordenadas cilíndricas debido a la simetría de revolución que posee el problema. Para poder calcular el caudal Q se puede usar la conservación del momento lineal en el volumen de control delimitado en la Figura con **verde**.

Es importante recordar que para aplicar una conservación, buscamos que nos relacione datos conocidos del problema, con lo que buscamos calcular. Si se elige además, la porción del tubo con diámetro D_1 nos topamos con un problema en la zona en que se angosta. Ahí no conocemos la distribución de presiones y la normal a la superficie tiene dirección tanto en \hat{r} como en \hat{z} , donde la primera se anula por simetría de revolución pero la segunda nos obstaculizará la resolución.

Teniendo en cuenta que el flujo es estacionario y no hay fuerza externas, entonces la conservación del momento queda

$$\underbrace{\oint_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS}_A + \underbrace{\oint_S (p - p_0) \hat{n} dS}_B = 0. \quad (1)$$

Donde S es la superficie que encierra al volumen seleccionado y en B se agregó (sin pérdida de generalidad) el término $\oint_S p_0 \hat{n} dS = 0$, por utilidad.

Antes de continuar es conveniente notar que muchos de los términos se anularán al separar la superficie cerrada en distintas secciones. El término A se anula en las superficies laterales ya que la velocidad es perpendicular a la normal y además en la zona de escurrimiento por simetría de revolución. Aquí se tuvo en cuenta en la salida del tubo la velocidad del jet es uniforme, entonces no puede existir un gradiente perpendicular de presiones, lo que lleva a que la presión ahí es P_0 . Así resulta $A = \int_{S_2} u_2 \hat{z} [u_2 \hat{z} \cdot (-\hat{z})] r d\theta dr$, con $S_2 = D_2^2 \pi / 4$ la sección de salida del tubo y queda implícito que al ser un jet la velocidad solo tiene componente z. Luego en el término B solo sobrevive la integral sobre la superficie de la placa, ya que en todo otro punto la presión es p_0 . Entonces resulta $B = \int_{S_{placa}} (p - p_0) \hat{n} dS$, que es la fuerza que el fluido le ejerce a la placa, así $B = F \hat{z}$.

Luego obtenemos de la componente en \hat{z} , $u_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} = F$. Solo falta relacionar la velocidad con el caudal $Q = u_2 S_2$ y resulta

$$Q = \sqrt{\frac{\pi F D_2^2}{4\rho}}. \quad (2)$$

Además pueden comprobar que es consistente en las unidades.

b) Para calcular la presión P_1 alcanza con utilizar Bernoulli para flujos estacionarios en una línea de corriente que va del punto 1 a 2 y se dibujó en la Figura.

De esta manera obtenemos

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_0}{\rho}. \quad (3)$$

Y relacionando las velocidades con el caudal, ahora conocido, $Q = u_1 D_1^2 \pi / 4 = u_2 D_2^2 \pi / 4$ se puede despejar la presión que buscamos

$$P_1 = P_0 + 2FD_2^2 \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4} \right). \quad (4)$$

Ahora queremos encontrar tanto $v(r)$ como $\delta(r)$. Para ello, siguiendo una idea similar al anterior alcanza. Primero tengamos en cuenta la conservación en la línea de corriente (Bernoulli estacionario) que vaya del punto 2 hacia uno donde se escurre con $r \gg D_1$ (no se incluyó en la Figura para no cargarla de más); y luego por conservación del caudal encontraremos el espesor de escurrimiento:

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v(r)^2}{2} \Rightarrow v(r) = u_2, \quad (5)$$

$$u_2 D_2^2 \frac{\pi}{4} = v(r) 2\pi r \delta(r) \Rightarrow \delta(r) = \frac{D_2^2}{8r}. \quad (6)$$

Donde $v(r)$ se considera uniforme para $r \gg D_1$ y entonces la presión es P_0 .

Al tener simetría de revolución, el área de escurrimiento es un *anillo* y su valor depende de la distancia al centro. Además se puede ver que necesariamente el espesor queda dependiendo del radio y decrece a medida que r aumenta.

c) En este inciso se propone el caso en que no hay gradiente de presiones, es decir que dentro del tubo la presión es la misma que la atmosférica ($P_1 = P_0$). La única posibilidad es que entonces se trate de un caso hidrostático, entonces

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Problema 3

Ante todo vale notar que este problema tiene marcadas similitudes con los Problemas 7 y 9 de la Práctica 3 y el ejercicio de parcial explicado en la clase práctica del 7/5/2021. En particular:

- I) El inciso a) es exactamente igual a lo encontrado en el primer apunte de la Práctica 3, más precisamente en la resolución del Problema 7a) ii). La única diferencia es el reemplazo de Q por $Q(t)$.
- II) El inciso b) requiere el cálculo de la presión utilizando un teorema de Bernoulli. Más precisamente, es de utilidad el teorema de Bernoulli para flujos irrotacionales no estacionarios, cuyo uso se ejemplificó en el apunte de la Práctica 2, en el problema 3. Resulta necesario calcular dos términos. Aquel asociado a u^2 es virtualmente idéntico a lo derivado en el apunte de la Práctica 3, en la resolución del Problema 7a) iv). La única novedad en términos de cálculos en este ejercicio es la de calcular $\partial_t W$, cálculo que resulta bastante directo.
- III) El inciso c) requiere reconocer para f una descomposición de la forma $f = f_t + f_B$ (visto en clase — https://youtu.be/d_Y7dQ-HBBM?t=2568—), aunque el primer término se anula al realizar el promedio temporal. El segundo, es exactamente el Problema 9 de la Práctica 3, con el agregado de un factor $1/2$ debido al promedio temporal. Conviene notar también que el cálculo de f_B es análogo al realizado en la clase práctica 6 (con fecha 7/5/2021), obviando las singularidades originadas por la presencia del plano.

Por lo que también puede serles de interés recurrir a los recursos mencionados.

a) En este problema nos piden estudiar la configuración 2D dada por una fuente/sumidero isótropa enfrentada a un cilindro. Usando el referencial que propone el enunciado, el cilindro se halla centrado en $(0, 0)$ y la fuente/sumidero en $(0, y_0)$. Dado que el flujo propuesto es 2D, irrotacional e incompresible, abordaremos el problema empleando las herramientas del cálculo de variable compleja, como es natural ya a esta altura de la cursada.

Para ello, recordemos que el potencial complejo $W_Q(z)$ asociado a una fuente isótropa (o un sumidero isótropo) de intensidad Q en z_0 es

$$W_Q = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}(z - z_0)Q, \quad (1)$$

donde $Q > 0$ implica una fuente y $Q < 0$ un sumidero. Asimismo, es útil tener presente el teorema de Milne-Thomson (*teorema del círculo*). En particular, para este caso, el mismo nos dice que para lograr la condición de contorno del flujo ideal en el cilindro podemos escribir

$$W_Q = \frac{Q}{2\pi} \left[\text{Ln}(z - z_0) + \frac{Q}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{a^2}{z} - z_0^* \right) \right], \quad (2)$$

donde $*$ denota la operación de conjugación.

Además, dado que el flujo es incompresible, el mismo se reacomoda instantáneamente a los cambios suaves en la intensidad de la fuente, como vimos en clase. Es por ello que podemos plantear el potencial complejo del problema dependiente del tiempo de manera análoga al problema estacionario pero considerando $Q = Q(t)$. **Noten que esta última justificación no fue considerada necesaria al momento de la evaluación, ya que ninguno la tuvo presente.** En consecuencia, el potencial complejo de la configuración será

$$W(z, t) = \frac{Q \cos(\omega t)}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(z - iy_0 \right) + \text{Ln} \left(\frac{a^2}{z} + iy_0 \right) \right]. \quad (3)$$

b) Para estudiar la presión sobre el cilindro notemos primero que de la simetría de reflexión alrededor del eje y y la condición de contorno, podemos concluir que en $z = \pm ia$ se tienen puntos de estancamiento. Más adelante, también veremos esto analíticamente. Asimismo, dado que el flujo es irrotacional, con densidad constante y se desarrolla en ausencia de fuerzas externas, sabemos que vale el siguiente teorema de Bernoulli

$$\partial_t \phi + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \mathcal{C}(t), \quad (4)$$

donde $\mathcal{C}(t)$ es una función dependiente únicamente del tiempo. Evaluando ahora esta expresión en el punto $z_e = ia$ y cualquier otro punto sobre el cilindro z_C tenemos

$$\Delta p = p_e - p_C = \underbrace{\frac{u_C^2}{2}}_{(1)} + \underbrace{\partial_t(W_C - W_e)}_{(2)}, \quad (5)$$

donde se denotó con $_e$ cantidades en z_e y con $_C$ a cantidades sobre z_C . Se usó también que $u_e = 0$ y que, por ser el cilindro una línea de corriente, $\partial_t \phi = \partial_t W$ (ya que allí $\psi = \text{cte}$).

Analicemos primero el término (2). Para ello evaluemos el potencial sobre el cilindro obteniendo

$$W(z = ae^{i\theta}) = \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\underbrace{\text{Ln}(ae^{i\theta} - iy_0)}_{z_1} + \underbrace{\text{Ln}(ae^{-i\theta} + iy_0)}_{z_1^*} \right] = \frac{Q(t)}{2\pi} \text{Ln}(|ae^{i\theta} - iy_0|^2), \quad (6)$$

y por tanto

$$(2) = \partial_t(W_C - W_e) = \partial_t \left[\frac{Q}{\pi} \cos(\omega t) \text{Ln} \left(\frac{|ae^{i\theta} - iy_0|}{|ia - iy_0|} \right) \right] = -\frac{\omega Q}{\pi} \text{sen}(\omega t) \text{Ln} \left(\frac{|y_0 + ia e^{i\theta}|}{y_0 - a} \right). \quad (7)$$

Como verificación adicional podemos ver que se anula en $\theta = \pi/2$, como debería suceder.

Para analizar el término (1) comencemos por reescribir primeramente el potencial de la ecuación (3) como

$$W = \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\text{Ln}(z - iy_0) + \text{Ln} \left(z - \frac{ia^2}{y_0} \right) - \text{Ln}(z) \right], \quad (8)$$

factorización que ya han utilizado en numerosas ocasiones en la guía de ejercicios. Derivando término a término obtenemos

$$\frac{dW}{dz} = W' = \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\frac{1}{z - iy_0} + \frac{1}{z - \frac{ia^2}{y_0}} - \frac{1}{z} \right], \quad (9)$$

lo que permite hallar la velocidad en todo el espacio

$$u^* = W' = \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\frac{z(z - ia^2/y_0) + z(z - iy_0) - (z - iy_0)(z - ia^2/y_0)}{(z - iy_0)(z - ia^2/y_0)z} \right] = \frac{Q(t)}{2\pi} \frac{z^2 + a^2}{(z - iy_0)(z - ia^2/y_0)z}, \quad (10)$$

que, como concluimos sin hacer cálculos, se anula para $z = \pm ia$. Evaluando ahora sobre el cilindro tenemos

$$\begin{aligned} u_C^* &= \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\frac{1}{ae^{i\theta}} \frac{a^2(e^{2i\theta} + 1)}{(ae^{i\theta} - iy_0)(ae^{i\theta} - ia^2/y_0)} \right] = \frac{Q(t)}{2\pi} \left[\frac{2a \cos(\theta)}{a^2 e^{2i\theta} - iy_0 a e^{i\theta} - ia^3/y_0 e^{i\theta} - a^2} \right] \\ &= \frac{Q(t)}{i\pi} \frac{\cos(\theta) e^{-i\theta}}{2a \text{sen}(\theta) - y_0 \left(1 + \frac{a^2}{y_0^2} \right)}, \end{aligned} \quad (11)$$

y por lo tanto reemplazando (7) y (11) en la ecuación (5) tenemos finalmente

$$\Delta p = \rho \left\{ \frac{Q^2}{2\pi^2} \frac{\cos^2(\omega t) \cos^2(\theta)}{\left[2a \operatorname{sen}(\theta) - y_0 \left(1 + \frac{a^2}{y_0^2}\right)\right]^2} - \frac{\omega Q}{\pi} \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{Ln} \left(\frac{|y_0 + ia e^{i\theta}|}{y_0 - a} \right) \right\}. \quad (12)$$

Podemos notar que, a diferencia del **Problema 7a) de la Práctica 3** (el caso estacionario), Δp puede ser negativa, es decir, p_e no será para todo tiempo un punto de máxima presión sobre el cilindro.

c) Como se vio en clase, la fuerza compleja $f = f_x + if_y$ está dada por

$$f = \underbrace{-i\rho \partial_t \oint_C W dz}_{f_t} + \underbrace{\left[\frac{i\rho}{2} \oint_C W'^2 dz \right]^*}_{f_B}, \quad (13)$$

ya que en el problema no hay fuerzas externas y donde C es una curva orientada positivamente que rodea al cilindro. En particular, en el término f_t podemos ver que la dependencia temporal será de la forma $-\omega \operatorname{sen}(\omega t)$, sin siquiera realizar ningún cálculo integral. Por lo tanto, vemos que $\langle f_t \rangle_t = 0$, donde $\langle \rangle_t$ denota promedio temporal en un período. **Por este motivo, durante la corrección, se consideró un error menor la omisión del término f_t en f .**

Calculemos ahora la fuerza instantánea de Blasius f_B . Usando la ecuación (9) podemos ver rápidamente que

$$f_B^*(t) = \frac{i\rho}{8\pi^2} Q^2 \cos^2(\omega t) \oint_C \left(\frac{1}{z - iy_0} + \frac{1}{z - \frac{ia^2}{y_0}} - \frac{1}{z} \right)^2 dz. \quad (14)$$

Como mencionamos en clase (y quienes aún no lo han demostrado, les sugiero que lo intenten), la integral cerrada de términos de la forma $(z - z_k)^{-1}(z - z_{k'})^{-1}$ es no nula solo si z_k es una singularidad interna y $z_{k'}$ externa al contorno de integración (o viceversa). También se anulan (esto es inmediato de ver), los términos de la forma $(z - z_k)^{-N}$ con $N > 1$. La integral queda entonces reducida a

$$f_B^*(t) = \frac{i\rho}{4\pi^2} Q^2 \cos^2(\omega t) \oint_C \frac{1}{(z - iy_0)(z - \frac{ia^2}{y_0})} - \frac{1}{(z - iy_0)z} dz. \quad (15)$$

Utilizando ahora la representación integral de Cauchy vemos que

$$\oint_C \frac{1}{(z - iy_0)(z - \frac{ia^2}{y_0})} dz = \frac{2\pi i}{0!} \left(\frac{1}{z - iy_0} \right)^{(0)} \Big|_{z=\frac{ia^2}{y_0}} = \frac{2\pi y_0}{a^2 - y_0^2}, \quad (16)$$

$$\oint_C \frac{1}{(z - iy_0)z} dz = \frac{2\pi i}{0!} \left(\frac{1}{z - iy_0} \right)^{(0)} \Big|_{z=0} = -\frac{2\pi}{y_0}, \quad (17)$$

donde $^{(q)}$ denota derivada de orden q . Y por lo tanto la fuerza de Blasius instantánea resulta

$$f_B^*(t) = \frac{i\rho}{2\pi} Q^2 \cos^2(\omega t) \frac{y_0^2 + 1}{y_0(a^2 - y_0^2)}. \quad (18)$$

Vale notar que la fuerza tiene solo componente en \hat{y} (**por la simetría del problema, no podría ser de otra manera**) y que no cambia de sentido si la singularidad actúa como fuente o sumidero. Finalmente, el promedio de \cos^2 en un período es $1/2$, obteniendo

$$\langle \mathbf{f} \rangle_t = \frac{Q^2 \rho}{4\pi} \frac{y_0^2 + 1}{y_0(y_0^2 - a^2)} \hat{y}, \quad (19)$$

que por ser $y_0 > a$ apunta en dirección $+\hat{y}$, como encontramos en el **Problema 9 de la Práctica 3**.