Resolución primer recuperatorio

Estructura de la Materia 1 - Primer cuatrimestre de 2021 - Cátedra Pablo Cobelli

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del primer recuperatorio de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial**.

Problema 1

a) Para obtener la distribución de presiones, vamos a estudiar el problema como lo ve un observador que rota con velocidad angular Ω en dirección del eje de simetría del cilindro $\hat{\boldsymbol{z}}$. Para este observador el fluido se halla en reposo y por lo tanto la ecuación de Euler resulta

$$0 = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} - g\hat{\boldsymbol{z}} + \Omega^2 r\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}\right) = 0, \tag{1.1}$$

donde escogimos un sistema de coordenadas cilíndricas y se incluyó el efecto de la fuerza centrífuga. Como sucedió en el **Problema 11 de la práctica**, **y al igual que en el primer parcial**, tenemos entonces que la presión verifica

$$p(r,z) = \begin{cases} \rho_1\left(\dfrac{\Omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C_1 & 0 < z < \eta(r) \\ \rho_2\left(\dfrac{\Omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C_2 & \eta(r) < z < L \end{cases}. \tag{1.2}$$

Esta última expresión considera que $z = 0$ se halla sobre la base del cilindro, que la altura de la interfaz η variará en función de la distancia al eje de rotación una vez que los fluidos se encuentran rotando y se definió $L = L_1 + L_2$. Además, naturalmente, la variación de la presión será distinta en cada fluido y por lo tanto la misma quedó definida como una función partida.

La constante C_2 puede hallarse considerando que la fuerza asociada a la presión sobre la parte inferior de la tapa $\boldsymbol{F}_t$ debe balancear el peso $\boldsymbol{P}$ de la misma y la fuerza asociada a la presión exterior $\boldsymbol{F}_e$, es decir

$$\underbrace{Mg}_{|\boldsymbol{P}|} + \underbrace{p_0\pi a^2}_{|\boldsymbol{F}_e|} = \underbrace{2\pi\int_0^a p(r,L) r\,\mathrm{d}r}_{|\boldsymbol{F}_t|} = \pi a^2\rho_2\left(\frac{\Omega^2 a^2}{4} - gL + C_2\right), \tag{1.3}$$

donde la presión debe necesariamente evaluarse en $z = L$ dada la incompresibilidad del fluido, es decir, que el volumen total de fluido antes y después de comenzar a rotar debe ser el mismo. Obtenemos entonces

$$C_2 = \frac{Mg}{\pi a^2} + p_0 + \rho_2\left(gL - \frac{\Omega^2 a^2}{4}\right). \tag{1.4}$$

Noten que el valor para C_2 es el mismo que hallaron para C en el primer parcial.

La constante C_1 saldrá sencillamente de proponer la continuidad de la presión en $z = \eta(r)$, como vimos en el problema 11 de la guía. Sin embargo, aún no conocemos la altura de la interfaz y por tanto hasta este momento la presión queda determinada como

$$\boxed{p(r,z) = \begin{cases} \rho_1\left(\dfrac{\Omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C_1 & 0 < z < \eta \\ \rho_2\left[g(L-z) + \dfrac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4}\right] + \dfrac{Mg}{\pi a^2} + p_0 & \eta < z < L \end{cases}.} \tag{1.5}$$

b) Hasta ahora solo consideramos que se conserva la cantidad total de fluido antes y después de que el cilindro comience a rotar. Sin embargo, no reparamos aún en que, necesariamente, debe conservarse también el volumen ocupado por cada fluido individualmente. Esto quiere decir que para que la solución tenga sentido físico debe verificarse

$$\pi a^2 L_1 = 2\pi \int_0^a \int_0^\eta r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r, \tag{1.6}$$

$$\pi a^2 L_2 = 2\pi \int_0^a \int_\eta^L r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r, \tag{1.7}$$

Noten sin embargo que, dado que $L = L_1 + L_2$, basta con requerir que se verifique una de estas condiciones, ya que la otra se satisfará automáticamente.

Por otra parte, la interfaz está caracterizada por ser una superficie de presión constante. Llamemos p_η al valor de la presión sobre la misma. Esta cantidad va a estar relacionada con la altura de la interfaz, utilizando la ecuación (1.5), mediante

$$\eta = \frac{1}{g}\left[\frac{1}{\rho_2}\left(p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} - p_\eta\right) + \frac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4}\right] + L \tag{1.8}$$

y entonces la ecuación (1.6) determina que p_η debe verificar

$$\pi a^2 L_1 = \left[L + \frac{1}{g\rho_2}\left(p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} - p_\eta\right) - \frac{\Omega^2 a^2}{4g}\right]\pi a^2 + \frac{2\pi}{g}\int_0^a \frac{\Omega^2}{2} r^3 \,\mathrm{d}r. \tag{1.9}$$

Obtenemos entonces p_η como

$$p_\eta = \rho_2 g L_2 + p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2}, \tag{1.10}$$

y utilizando la ecuación (1.8) obtenemos la altura de la interfaz como

$$\boxed{\eta(r) = L_1 + \frac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4g}.} \tag{1.11}$$

c) Podemos ahora resolver completamente el campo de presiones, utilizando que $p(r,\eta) = p_\eta$ y reemplazando para el campo de presiones en el fluido de densidad ρ_1 (esto se verifica trivialmente, por construcción, para el de densidad ρ_2) y entonces

$$\rho_2 g L_2 + p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} = \rho_1\left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} - gL_1 - \frac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4}\right) + C_1, \tag{1.12}$$

vemos que la parte dependiente de r efectivamente se cancela y obtenemos

$$C_1 = g(\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2) + p_0 + \frac{Mg}{\pi a^2} - \rho_1\frac{\Omega^2 a^2}{4}. \tag{1.13}$$

Finalmente, el campo de presiones en todo el fluido resulta

$$\boxed{p(r,z) = \begin{cases} \rho_1\left[g\left(L_1 + \dfrac{\rho_2}{\rho_1}L_2 - z\right) + \dfrac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4}\right] + \dfrac{Mg}{\pi a^2} + p_0 & 0 < z < \eta(r) \\ \rho_2\left[g(L - z) + \dfrac{\Omega^2(2r^2 - a^2)}{4}\right] + \dfrac{Mg}{\pi a^2} + p_0 & \eta(r) < z < L \end{cases}.} \tag{1.14}$$

Noten que si consideramos $\rho_1 = \rho_2$ ambas expresiones para la presión coinciden y se recupera la solución obtenida para el problema del primer parcial.

Si bien no era necesario este planteo, otra manera equivalente de de hallar C_1 que no requiere encontrar η primero, es simplemente proponiendo que la fuerza sobre el fondo ($z = 0$) tiene que ser igual al peso de todo lo que se halla por encima de este. Se obtiene de esta manera

$$2\pi \int_0^a \left(\rho_1 \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C_1\right) r \, \mathrm{d}r = g\left(\rho_1 \pi a^2 L_1 + \rho_2 \pi a^2 L_2\right) + Mg + p_0 \pi a^2, \tag{1.15}$$

y por tanto

$$C_1 = g\left(\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2\right) + \frac{Mg}{\pi a^2} + p_0 - \rho_1 \frac{\Omega^2 a^2}{4}. \tag{1.16}$$

d) Para encontrar velocidad de rotación máxima soportada bajo la configuración propuesta $\Omega_{\text{crít}}$, debemos notar la existencia de un término $\propto -\Omega^2 a^2$ en la presión. Para valores $\Omega > \Omega_{\text{crít}}$ este término redundará en una presión negativa en parte del fluido, situación que sabemos, no es físicamente realizable. Considerando además que la presión es mínima en $r = 0$ y $z = L$, tenemos por lo tanto

$$-\frac{\rho_2 \Omega_{\text{crít}}^2 a^2}{4} + \frac{Mg}{\pi a^2} + p_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Omega_{\text{crít}} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{Mg}{\pi a^2} + p_0\right)}.} \tag{1.17}$$

Adicionalmente, debemos considerar la posibilidad de que, o bien el fluido de densidad ρ_1 esté en contacto con la tapa o, por el contrario, aquel con ρ_2 haga lo propio con el fondo del recipiente. Bajo estas circunstancias, no resulta válido el análisis considerado en los incisos previos. Utilizando la ecuación (1.8) vemos que la primera de estas condiciones se producirá para el caso límite en $r = a$ y lo hará para una velocidad angular Ω_1 tal que

$$L = L_1 + \frac{\Omega_1^2 a^2}{4g} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Omega_1 = \frac{2\sqrt{L_2 g}}{a}.} \tag{1.18}$$

Por su parte, el fluido con ρ_2, en caso de tocar el fondo, lo hará primeramente en $r = 0$ y con una velocidad angular Ω_2 de manera que

$$0 = L_1 - \frac{\Omega_2^2 a^2}{4g} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Omega_2 = \frac{2\sqrt{L_1 g}}{a}.} \tag{1.19}$$

Concluimos finalmente que la solución hallada es válida para

$$\Omega < \frac{2}{a} \operatorname{mín}\left\{\sqrt{\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{Mg}{\pi a^2} + p_0\right)}; \sqrt{L_2 g}; \sqrt{L_1 g}\right\}. \tag{1.20}$$

Problema 2

a) Nos piden hallar la fuerza necesaria para evitar que se acelere el carrito. Esto quiere decir que, por la segunda ley de Newton, debe verificarse

$$\boldsymbol{F_j} + \boldsymbol{F} = 0, \tag{2.1}$$

donde $\boldsymbol{F_j}$ es la fuerza que realiza el chorro sobre el deflector y, por ende, sobre el carrito.

Para obtener $\boldsymbol{F_j}$ caractericemos primeramente el flujo, tarea que será más sencilla considerando un referencial que se mueve con V_c, es decir, un observador inercial para el cual el carrito permanece inmóvil. En dicho sistema, lejos del deflector y antes de impactar al mismo, conocemos la densidad ρ_j del fluido, su velocidad $V_j - V_c$ y su sección A_j y llamemos p_0 a la presión asociada aunque, como veremos, no será relevante. Por otra parte, también lejos del deflector pero posterior al impacto, es razonable suponer que el flujo vuelve a ser unidireccional, como hicimos en las clases prácticas, y por lo tanto la presión allí también es p_0.

Dado que el flujo es estacionario en el referencial propuesto, podemos aplicar el teorema de Bernoulli. Noten que para cualquier otro referencial, el campo de velocidades no es estacionario, sencillamente porque cambia la región del espacio ocupada por fluido. Entonces, para una línea de corriente cualquiera, el teorema de Bernoulli nos indica que la velocidad luego del impacto (y lejos del deflector), tendrá igual magnitud y por tanto será $\boldsymbol{u}' = (V_j - V_c)\left(\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}\right)$ (el subíndice $'$ denota cantidades medidas por el observador moviéndose con V_c). La conservación del caudal implica entonces que también tendremos A_j después del impacto. Estos resultados deberían resultarnos familiares de varios ejercicios de la práctica.

Si ahora escogemos un volumen de control cuya pared lateral está dada por el propio jet y cuyas tapas se hallen lejos de la zona de impacto, la conservación integral del momento requiere

$$\oiint_{\mathcal{S}} (p - p0)\hat{\boldsymbol{n}} + \rho\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}'\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}_1} \rho\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}'\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}_2} \rho\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{u}'\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathcal{S}_L} (p - p0)\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{0}. \tag{2.2}$$

Aquí $\mathcal{S}$ es la superficie que encierra al volumen propuesto, $\mathcal{S}_1$ la tapa a la izquierda del deflector, $\mathcal{S}_2$ la tapa a la derecha del mismo y $\mathcal{S}_L$ la pared lateral del jet y $\hat{\boldsymbol{n}}$ es la normal externa al fluido. Noten que estas expresiones también referencian las velocidades al sistema primado, ya que es en éste donde el volumen de control permanece fijo en el espacio y por tanto valdrá esta forma de la conservación de momento. Además, como hicimos en clase, utilizamos $p - p_0$ a la hora de integrar la presión, puesto que la integral cerrada de una constante es cero. De esta manera, las integrales de presión sobre $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ se anularon, mientras que la integral de la velocidad sobre $\mathcal{S}_L$ resulta nula por estar $\mathcal{S}_L$ compuesta por líneas de corriente.

Si notamos ahora que, por definición, la integral restante sobre $\mathcal{S}_L$ se relaciona con $\boldsymbol{F}_j$ mediante $\boldsymbol{F}_j = \iint_{\mathcal{S}_L} (p - p0)\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$[1] y entonces proyectando en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{F}_j \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \iint_{\mathcal{S}_1} \rho(V_j - V_c)^2\,\mathrm{d}S - \iint_{\mathcal{S}_2} \rho(V_j - V_c)^2\cos(\theta)\,\mathrm{d}S = \rho A_j(V_j - V_c)^2\left[1 - \cos(\theta)\right]. \tag{2.3}$$

A partir de la ecuación (2.1), obtenemos entonces

$$\boxed{F_x = -\rho A_j(V_j - V_c)^2\left[1 - \cos(\theta)\right].} \tag{2.4}$$

Como esperaríamos a priori, esta fuerza apunta en $-\hat{\boldsymbol{x}}$ y se anula en caso que $\theta = 0$, mientras que resulta máxima si $\theta = \pi/2$.

[1]Noten que $\hat{\boldsymbol{n}}$ es la normal interna al sólido, por lo que la expresión es equivalente a $-\int(p - p_0)\hat{\boldsymbol{n}}_e\,\mathrm{d}S$, con $\hat{\boldsymbol{n}}_e$ la normal externa al mismo.

b) Dado que el trabajo no es independiente del observador (ya que no lo son los desplazamientos), la potencia debemos calcularla para el referencial propuesto en el enunciado (donde el carrito se mueve a V_c). La potencia instantánea P entregada por el chorro al carrito será entonces

$$P = \boldsymbol{F}_j \cdot \boldsymbol{V}_c \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{P = \rho A_j V_c (V_j - V_c)^2 \left[1 - \cos(\theta)\right] = P} \tag{2.5}$$

Aquí $\boldsymbol{V}_c = V_c \hat{\boldsymbol{x}}$ es la velocidad (no la rapidez) del carrito. Como es de esperar, la potencia es positiva, ya que el fluido realiza trabajo en la dirección de movimiento del carrito.

c) Como debería indicar la intución basada en la física cotidiana, la fuerza que debemos realizar será máxima cuando busquemos que el carrito permanezca inmóvil en el sistema de laboratorio. Esto puede mostrarse fácilmente maximizando

$$|F_x| = \rho A_j (V_j - V_c)^2 \left[1 - \cos(\theta)\right], \tag{2.6}$$

que puede verse sin necesidad de más cálculos que se maximiza para

$$\boxed{V_c^{F_{\text{máx}}} = 0.} \tag{2.7}$$

Noten que si buscan puntos estacionarios de $|F_x|$, van a encontrar solo 1 en $V_c = V_j$, que corresponde a un mínimo, ya que allí la fuerza es nula. Si querían resolverlo de esta manera, debían notar que la situación planteada **tiene sentido físico en el intervalo $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{V_c} \leq \boldsymbol{V_j}$**[2], y por lo tanto, de acuerdo al Teorema de Weierstrass, además de considerar los puntos estacionarios en el interior, hay que analizar los extremos del intervalo.

d) Nos preguntan ahora el valor de V_c para el cual la potencia es máxima. Vale notar que para $V_c = 0$ (que maximiza la fuerza) la potencia se anula (ni el fluido ni el agente externo realizan trabajo). Entonces los candidatos a máximo deben satisfacer

$$\frac{\partial P}{\partial V_c} = \rho A_j \left[1 - \cos(\theta)\right] (V_c - V_j)(2V_c + V_c - V_j) = 0. \tag{2.8}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, sin embargo, $V_c = V_j$ corresponde a un mínimo (ya que allí $P = 0$), por lo que la velocidad buscada será

$$\boxed{V_c^{P_{\text{máx}}} = \frac{V_j}{3}.} \tag{2.9}$$

[2] Piensen por qué.

Problema 3

a) i) Para la configuración propuesta podemos obtener los puntos de estancamiento utilizando el potencial complejo de la configuración. El mismo se puede obtener mediante superposición del potencial de un flujo al infinito con dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$ y una fuente puntual ubicada en $z = 0$, resultando

$$W(z) = U_0 z + \frac{Q}{\pi}\,\mathrm{Ln}(z), \tag{3.1}$$

donde el logaritmo se halla acompañado por un factor $1/\pi$ dado que la fuente emite un caudal Q solo en el semiplano $y > 0$. El campo de velocidades asociado u resulta

$$u^* = U_0 + \frac{Q}{\pi}\frac{1}{z}, \tag{3.2}$$

donde * denota la operación de conjugación.

Los puntos de estancamiento z_{est} deben verificar entonces

$$-z_{\mathrm{est}} U_0 = \frac{Q}{\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z_{\mathrm{est}} = -\frac{Q}{\pi U_0}.} \tag{3.3}$$

Como era de esperar, vemos que obtuvimos un único punto de estancamiento, que se halla sobre el eje $\hat{\boldsymbol{x}}$ y se ubica aguas arriba de la fuente. Aún más, cuanto más intenso el flujo del infinito, más cerca de la fuente se ubica este punto y, por el contrario, cuanto más intensa es la fuente más lejos de la misma se halla z_{est}.

ii) Dado que la existencia de una separatriz implica que los elementos de fluido no pueden pasar de un lado a otro de la misma, la misma debe ser necesariamente una línea de corriente (es decir, la velocidad normal sobre la misma debe ser nula). Busquemos entonces la función corriente $\psi = \mathrm{Im}\{W\}$, que está dada por

$$\psi(r,\theta) = U_0 r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{Q}{\pi}\theta, \tag{3.4}$$

donde como sugiere el enunciado expresamos la misma en coordenadas polares. Sabemos que las líneas de corriente están dadas por $\psi = \mathrm{cte}$ y, en particular, la separatriz debe pasar por el punto de estancamiento z_{est}. Usando esta información podemos obtener el valor de la constante asociada a la separatriz C como

$$C = Q, \tag{3.5}$$

y entonces la separatriz resulta

$$\boxed{r_{\mathrm{sep}} = \frac{Q}{U_0}\frac{1-\theta_{\mathrm{sep}}/\pi}{\mathrm{sen}(\theta_{\mathrm{sep}})},} \tag{3.6}$$

que como debería suceder por construcción, pasa por $r_{\mathrm{sep}} = z_{\mathrm{est}}$ para $\theta = \pi$[3].

b) i) Para obtener la componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ de la fuerza que el fluido realiza sobre el obstáculo, podemos considerar una configuración similar con simetría de reflexión en $\hat{\boldsymbol{y}}$. Luego, la fuerza horizontal obtenida para esta configuración ficticia será dos veces la de nuestro problema. En el caso simétrico (donde el plano desaparece — o podemos pensar que colapsa a la recta $y = 0$ —), podemos usar el teorema de Blasius como

$$f_x = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\rho}{4}\oint_{\mathcal{C}} \breve{W}'^2\,\mathrm{d}z\right\}, \tag{3.7}$$

[3]Pueden verificar que $\lim\limits_{\theta\to\pi}(1-\theta/\pi)/\,\mathrm{sen}(\theta) = 1/\pi$.

donde $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $z = Re^{i\theta}$ y dividimos por dos el miembro derecho de forma que f^* sea ya la fuerza horizontal para nuestra configuración original. $\breve{W}$ es el potencial de la configuración que tiene a la fuente (que ahora es dos veces más intensa y emite entre 0 y 2π), el flujo del infinito y las correspondientes imágenes en el cilindro. Por el Teorema de Milne-Thomson $\breve{W}$ estará dado por

$$\breve{W}(z) = U_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{2Q}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}(z+2R) + \mathrm{Ln}\left(\frac{R^2}{z} + 2R\right)\right], \tag{3.8}$$

donde usamos ahora un sistema de referencia con origen en el centro del cilindro. Como hicimos en las prácticas, será útil reescribir esta última expresión de la siguiente manera

$$\breve{W}(z) = U_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{Q}{\pi}\left[\mathrm{Ln}(z+2R) + \mathrm{Ln}\left(z + \frac{R}{2}\right) - \mathrm{Ln}(z)\right], \tag{3.9}$$

donde se omitió un término de la forma $Q\ln(2R)/\pi$ ya que el potencial complejo siempre está definido a menos de una constante.

Desarrollando entonces la ecuación (3.7) tenemos

$$f_x = \mathrm{Re}\left\{\frac{i\rho}{4}\oint_{\mathcal{C}}\left\{U_0\left[1-\left(\frac{R}{z}\right)^2\right] + \frac{Q}{\pi}\left[\frac{1}{z+2R} + \frac{1}{z+\frac{R}{2}} - \frac{1}{z}\right]\right\}^2 \mathrm{d}z\right\}. \tag{3.10}$$

Si nos quedamos solo con los términos que combinan una singularidad interna y otra externa (los demás sabemos que se anularán) resulta

$$\begin{aligned} f_x = \mathrm{Re}\Bigg\{\frac{i\rho}{2}\oint_{\mathcal{C}}\Bigg[-U_0^2\frac{R^2}{z^2} + \frac{Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{(z+2R)(z+R/2)} - \frac{1}{(z+2R)z}\right) + \\ + \frac{QU_0}{\pi}\left(\frac{1}{z+R/2} - \frac{1}{z} - \frac{R^2}{z^2(z+2R)}\right)\Bigg]\mathrm{d}z\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

A su vez, el primer término también se anula por ser un polo de orden 2 en $z = 0$, mientras que los términos $1/(z - R/2)$ y $1/z$ se cancelan mutuamente ya que ambos tendrán magnitud $2\pi i$. Por su parte, los otros tres términos, en principio no nulos, pueden ser fácilmente calculados mediante el teorema integral de Cauchy, obteniendo

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{Q^2}{\pi^2}\frac{1}{(z+2R)(z+R/2)}\mathrm{d}z = \frac{Q^2}{\pi^2}\frac{2\pi i}{0!}\left.\frac{1}{z+2R}\right|_{z=-R/2} = \frac{i2Q^2}{\pi}\frac{2}{3R}, \tag{3.12}$$

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{Q^2}{\pi^2}\frac{1}{(z+2R)z}\mathrm{d}z = \frac{Q^2}{\pi^2}\frac{2\pi i}{0!}\left.\frac{1}{z+2R}\right|_{z=0} = \frac{iQ^2}{\pi}\frac{1}{R}, \tag{3.13}$$

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{Q}{\pi}\frac{U_0R^2}{(z+2R)z^2}\mathrm{d}z = \frac{QU_0R^2}{\pi}\frac{2\pi i}{1!}\left(-\frac{1}{(z+2R)^2}\right)_{z=0} = -\frac{iQU_0}{2}. \tag{3.14}$$

Reemplazando estos cálculos:

$$f_x = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{4Q^2}{3\pi R} - \frac{Q^2}{\pi R} - \frac{QU_0}{2}\right), \tag{3.15}$$

y entonces la fuerza sobre el semicilindro será

$$\boxed{\boldsymbol{f} = -\frac{\rho Q}{12\pi}\left(\frac{2Q}{R} - 3\pi U_0\right)\hat{\boldsymbol{x}}.} \tag{3.16}$$

Vemos que, como era de esperar, para $U_0 = 0$ la fuente atrae al semicilindro, como vimos en los ejercicios de la práctica.

ii) Para encontrar los puntos de estancamiento resultará útil escribir el potencial complejo de la configuración planteada, que será igual al expresado en el inciso anterior solo que tendrá como dominio $z \geq 0$. Llamando $\widetilde{W}(z)$ a un potencial complejo de nuestra configuración, el mismo puede expresarse.

$$\widetilde{W}(z) = U_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{Q}{2\pi} \left[\mathrm{Ln}(z + 2R) + \mathrm{Ln} \left(z + \frac{R}{2} \right) - \mathrm{Ln}(z) \right]. \tag{3.17}$$

El campo de velocidades de la configuración resulta entonces

$$\tilde{u}^* = U_0 \left[1 - \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right] + \frac{Q}{\pi} \left[\frac{1}{z + 2R} + \frac{1}{z + \frac{R}{2}} - \frac{1}{z} \right], \tag{3.18}$$

y los puntos de estancamiento $\tilde{z}_{\text{est}}$ verifican

$$0 = U_0 \left[1 - \left(\frac{R}{\tilde{z}_{\text{est}}} \right)^2 \right] + \frac{Q}{\pi} \left[\frac{1}{\tilde{z}_{\text{est}} + 2R} + \frac{1}{\tilde{z}_{\text{est}} + \frac{R}{2}} - \frac{1}{\tilde{z}_{\text{est}}} \right], \quad \Longrightarrow \tag{3.19}$$

$$\Longrightarrow \quad U_0(R^2 - \tilde{z}_{\text{est}}^2) = \frac{Q}{\pi} \left[\frac{\tilde{z}_{\text{est}}^2}{\tilde{z}_{\text{est}} + 2R} + \frac{\tilde{z}_{\text{est}}^2}{\tilde{z}_{\text{est}} + \frac{R}{2}} - \tilde{z}_{\text{est}} \right], \quad \Longrightarrow \tag{3.20}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{z_{\text{est}}}(\tilde{z}_{\text{est}}^2 - R^2) + \tilde{z}_{\text{est}} = \frac{\tilde{z}_{\text{est}}^2}{\tilde{z}_{\text{est}} + 2R} + \frac{\tilde{z}_{\text{est}}^2}{\tilde{z}_{\text{est}} + \frac{R}{2}}, \quad \Longrightarrow \tag{3.21}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{z_{\text{est}}}(\tilde{z}_{\text{est}}^2 - R^2) + \tilde{z}_{\text{est}} = \frac{\tilde{z}_{\text{est}}^2 (4\tilde{z}_{\text{est}} + 5R)}{(\tilde{z}_{\text{est}} + 2R)(2\tilde{z}_{\text{est}} + R)}, \tag{3.22}$$

donde $z_{\text{est}} = -Q/(\pi U_0)$ es el punto de estancamiento hallado en **a)**. Reordenando los términos llegamos a

$$\tilde{z}_{\text{est}}^4 + \left(\frac{5}{2}R - z_{\text{est}} \right) \tilde{z}_{\text{est}}^3 + \left(z_{\text{est}} R^2 - \frac{5}{2} R^3 \right) \tilde{z}_{\text{est}} - R^4 = 0. \tag{3.23}$$

Por la simetría del problema podemos asegurar que $\tilde{z}_{\text{est}} = \pm R$ deben necesariamente ser solución. En efecto, se ve fácilmente que verifican la ecuación (3.23). Podemos obtener dos raíces adicionales dividiendo esta última ecuación por las soluciones mencionadas, obteniendo

$$\tilde{z}_{\text{est}}^2 + \left(\frac{5}{2}R - z_{\text{est}} \right) \tilde{z}_{\text{est}} + R^2 = 0, \tag{3.24}$$

y las puntos de estancamiento no triviales del campo de velocidades resultan

$$\tilde{z}_{\text{est}} = \frac{(z_{\text{est}} - \frac{5}{2}R) \pm \sqrt{z_{\text{est}}^2 - 5 z_{\text{est}} R + \frac{9}{16} R^2}}{2}, \tag{3.25}$$

que como era de esperar también se hallan sobre el eje $\hat{\boldsymbol{x}}$. Si bien no era necesario que lo hicieran, se puede demostrar adicionalmente que la solución de la rama positiva se encuentra siempre dentro del semicilindro y por tanto la descartamos. A modo de resumen entonces, los puntos de estancamiento cuando se introduce el obstáculo semicilíndrico resultan

$$\boxed{\tilde{z}_{\text{est}} = \begin{cases} \pm R \\ \frac{1}{2}\left(z_{\text{est}} - \frac{5}{2}R\right) - \frac{1}{4}\sqrt{4z_{\text{est}}^2 - 20 z_{\text{est}} R + 9R^2} \end{cases} .} \tag{3.26}$$

Observemos que en el límite $R \to 0$ recuperamos la solución $\tilde{z}_{\text{est}} = z_{\text{est}}$ (recuerden que $z_{\text{est}} < 0$), y una solución con multiplicidad 2 sobre la fuente, que es físicamente irrealizable.