

Resolución segundo parcial

Estructura de la Materia 1 - Segundo cuatrimestre de 2021 - Cátedra Pablo Cobelli

Acerca de este documento

Este documento contiene una descripción detallada de una forma de resolución de los ejercicios del segundo parcial de *Estructura de la Materia 1*. Al respecto caben varias aclaraciones.

- En este documento les describimos solo una forma posible de resolver los ejercicios propuestos en el examen, como sabemos existen muchas formas de abordar un problema dado.
- Encontrarán un considerable grado de detalle en la descripción de los razonamientos y los cálculos empleados para resolver los ejercicios. Ese grado de detalle responde a la necesidad de que este documento les resulte pedagógico, y puede compararse con el detalle con el que estos problemas se discutirían en clase. Es decir: **en ninguna forma este nivel de detalle es indicativo del necesario o requerido para la aprobación del parcial.**
- Cualquier consulta que tengan respecto del contenido de este documento podrán realizarla durante las clases prácticas.

Problema 1

a) En este inciso nos proponen hallar la solución más sencilla compatible con la situación planteada. Notemos que, dado que el único forzante (el gradiente de presiones) actúa en la dirección \hat{z} , entonces resulta razonable proponer $\mathbf{u} = \mathbf{u}_z(r, \theta, z, t)\hat{z}$. Adicionalmente, dada la simetría cilíndrica del problema y que estamos resolviendo una situación estacionaria, concluimos $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}(r, z)\hat{z}$. Esta propuesta puede reducirse aún más considerando la incompresibilidad del fluido, y por tanto $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}(r)\hat{z}$.

Para resolver para \mathbf{u} , utilizamos la conservación local de momento, i.e., la ecuación de Navier-Stokes¹, que para este caso resulta

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \nabla^2 u_z. \quad (1)$$

De las primeras dos ecuaciones podemos concluir que $p = p(z)$, mientras que de la última vemos que $\partial_z p$ no depende de z , y por lo tanto para verificar la condición de contorno en la presión recuperamos que $\partial_z p = \Delta p/L = G$. Utilizando la expresión para el laplaciano de un escalar en coordenadas cilíndricas¹ tenemos

$$\frac{G}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right), \quad (2)$$

e integrando dos veces recuperamos la solución general

$$u_z = \frac{G}{4\mu} r^2 + C \ln(r) + D. \quad (3)$$

Para encontrar la solución a nuestro problema concreto resta considerar las condiciones de contorno, que prohíben el movimiento relativo entre el fluido y las paredes. Esto nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\frac{G}{4\mu} b^2 + C \ln(b) + D = 0, \quad (4)$$

$$\frac{G}{4\mu} a^2 + C \ln(a) + D = 0, \quad (5)$$

que tiene como solución

$$C = -\frac{G}{4\mu} \frac{(b^2 - a^2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad D = \frac{G}{4\mu} \frac{(b^2 \ln(a) - a^2 \ln(b))}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (6)$$

por lo que obtenemos finalmente

$$u_z(r) = \frac{G}{4\mu} \left[r^2 - \frac{(b^2 - a^2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln(r) + \frac{b^2 \ln(a) - a^2 \ln(b)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right]. \quad (7)$$

Puede verse fácilmente que esta solución verifica las condiciones de contorno impuestas.

b) Este inciso nos pide encontrar el esfuerzo viscoso que realiza el fluido sobre el cilindro interior. Recordando la relación entre el esfuerzo $\boldsymbol{\tau}$ aplicado sobre un diferencial de superficie con normal externa $\hat{\mathbf{n}}$ y el tensor de esfuerzos en dicho punto σ , $\tau_i = \sigma_{ij}\hat{n}_j$, tenemos para la situación en cuestión

$$\tau_i|_{ci} = \sigma_{ir}|_{r=a}, \quad i \in (r, \theta, z) \quad (8)$$

¹Que podemos encontrar, por ejemplo, en la sección de *Material de Referencia* de la página de la materia.

²Notemos que, en la resolución del Problema 4 de la guía práctica de flujos viscosos se llegaba a la misma ecuación diferencial (2) y, por ende, a la misma solución general dada por (3).

puesto que el cilindro interior tiene como normal externa a \hat{r} y donde τ_{ci} denota una cantidad evaluada sobre el cilindro interior. Dada la simetría del problema el único elemento no nulo de la contribución viscosa al tensor de esfuerzos¹ resulta $\sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} = \mu \partial_r u_z$ y por lo tanto

$$\tau_{ci} = \frac{G}{4} \left[2a - \frac{(b^2 - a^2)}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right] \hat{z}. \quad (9)$$

c) Sea $r_{m\acute{a}x}$ la distancia (radial) al eje de simetría donde la velocidad del flujo es máxima, podemos ver que la misma no va a depender de ρ , puesto que estamos despreciando la inercia del fluido (i.e., estamos ante una situación estacionaria y sin advección). Asimismo, r_0 tampoco podrá depender de G o μ , puesto que aumentar o disminuir la intensidad del forzante o de la difusión de momento modificará el caudal de fluido pero no la forma del perfil de velocidades (para el caso plano-paralelo considerado). Luego tenemos

$$r_{m\acute{a}x} = f(a, b). \quad (10)$$

Notemos además que tiene sentido adimensionalizar $r_{m\acute{a}x}$ de manera que pueda ser, como máximo, 1 (en caso que $r_{m\acute{a}x} = b$). Llamemos Π a esta cantidad adimensionalizada. Algo similar podemos hacer con a , definiendo $\Pi_1 = a/b$ como un parámetro que contiene la información asociada a la relación de aspecto del problema. Tendremos entonces

$$\Pi = \frac{r_{m\acute{a}x}}{b} = f\left(\frac{a}{b}\right) \equiv f(\Pi_1), \quad (11)$$

y por tanto finalmente

$$r_{m\acute{a}x} = b f\left(\frac{a}{b}\right). \quad (12)$$

Como comprobación adicional, podemos notar que el punto de máxima velocidad será donde se minimize el esfuerzo viscoso (ya que allí $\partial_r u_z = 0$). Con esta consideración, usando la [ecuación \(9\)](#), obtenemos analíticamente

$$r_{m\acute{a}x}^2 = b^2 \frac{1 - \frac{a^2}{b^2}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (13)$$

Aunque el enunciado no lo requería, hallamos entonces que

$$f(\Pi_1) = -\frac{1 - \Pi_1^2}{\ln(\Pi_1)}. \quad (14)$$

Problema 2

a) En este problema debemos estudiar la estabilidad del flujo base dado por

$$U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z > 2L \\ U_0 \left(2 - \frac{z}{L}\right) & \text{si } L < z < 2L, \\ \frac{U_0 z}{L} & \text{si } 0 < z < L \end{cases}, \quad U'(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z > 2L \\ -\frac{U_0}{L} & \text{si } L < z < 2L, \\ \frac{U_0}{L} & \text{si } 0 < z < L \end{cases}, \quad (15)$$

donde U denota al flujo base y se incluyó también su derivada U' por practicidad.

Para hacerlo, utilizaremos la ecuación de Rayleigh para la modulación vertical de la amplitud de la perturbación ϕ . Dado que el flujo base está definido a trozos, proponemos también una amplitud definida a trozos $\phi = \cup_{i \in \{0,1,2\}} \phi_i$, donde en cada región debe verificarse

$$\phi_i'' - k^2 \phi_i = 0, \quad (16)$$

ya que $U'' = 0 \forall z$. Recuperamos entonces la solución

$$\phi(z) = \begin{cases} \phi_2 = Ae^{kz} + Be^{-kz} & \text{si } z > 2L \\ \phi_1 = De^{kz} + Ee^{-kz} & \text{si } L < z < 2L. \\ \phi_0 = Fe^{kz} + Ge^{-kz} & \text{si } 0 < z < L \end{cases} \quad (17)$$

Resta aplicar las condiciones de contorno. Las mismas exigen que la perturbación al campo de velocidades se mantenga acotado en todo el dominio ocupado por fluido, y en particular en infinito, por lo que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}\| < \infty \implies \lim_{z \rightarrow \infty} \|-\nabla \times \psi \hat{\mathbf{y}}\| < \infty \implies \phi_2 = Be^{-kz}. \quad (18)$$

Por otra parte, en $z = 0$ debe anularse la componente normal de la velocidad pues se halla presente allí un sólido, y entonces

$$\delta u_z|_{z=0} = (\partial_x \psi)|_{z=0} = \phi_0|_{z=0} = 0. \quad (19)$$

Obtuvimos entonces la solución

$$\phi(z) = \begin{cases} \phi_2 = Be^{-kz} & \text{si } z > 2L \\ \phi_1 = De^{kz} + Ee^{-kz} & \text{si } L < z < 2L. \\ \phi_0 = H \sinh(kz) & \text{si } 0 < z < L \end{cases} \quad (20)$$

b) Para hallar la relación de dispersión, debemos reparar en que hasta ahora resolvimos la ecuación de Rayleigh en cada dominio de manera independiente. Para obtener una solución razonable para todo el dominio, debemos imponer condiciones de empalme derivables de la continuidad de la presión y la velocidad normal en $z = L, 2L$. Dichas condiciones, que fueron vistas en las clases teóricas y prácticas (y también se hallan en el apunte correspondiente a la quinta guía de ejercicios), resultan para el caso en cuestión

$$-\frac{Be^{-k2L}}{c} = -\frac{De^{2kL} + Ee^{-k2L}}{c}, \quad (21)$$

$$-ckBe^{-2kL} = -\frac{U_0}{L} (De^{2kL} + Ee^{-2kL}) + ck (De^{2kL} - Ee^{-2kL}), \quad (22)$$

$$\frac{H \sinh(kL)}{U_0 - c} = \frac{De^{kL} + Ee^{-kL}}{U_0 - c}, \quad (23)$$

$$-\frac{U_0}{L} (De^{kL} + Ee^{-kL}) - (U_0 - c)k (De^{kL} - Ee^{-kL}) = H \left[\frac{U_0}{L} \sinh(kL) - (U_0 - c)k \cosh(kL) \right], \quad (24)$$

donde (21) y (23) corresponden a la continuidad de u_z en $z = 2L$ y $z = L$, respectivamente, mientras que del mismo modo (22) y (24) corresponden a la continuidad de p en $z = 2L$ y $z = L$.

Armando la matriz \mathbb{M} del sistema de ecuaciones dado por las expresiones (21) a (24) es posible hallar la relación de dispersión del sistema buscando soluciones no triviales (i.e. no idénticamente nulas), es decir, encontrando $\{\omega = ck : \det[\mathbb{M}(\omega)] = 0\}$.

c) El enunciado nos informa que la relación de dispersión verifica la ecuación

$$a(k')\omega^2 + b(k')\omega \frac{U_0}{L} + c(k') \left(\frac{U_0}{L} \right)^2 = 0, \quad (25)$$

donde k' es el número de onda adimensional definido como $k' = kL$. Notemos que ω estará dado por

$$\omega = \frac{U_0}{L} \left[\frac{-b(k')}{2a(k')} \pm \sqrt{\frac{g(k')}{100}} \right], \quad (26)$$

con g definido como

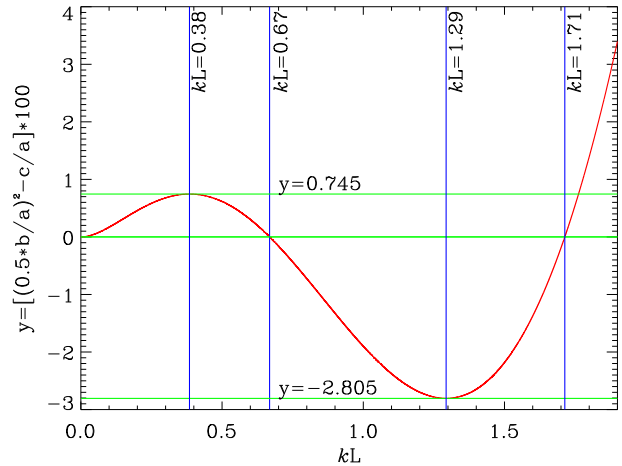
$$g(k') = 100 \left[\left(\frac{b(k')}{2a(k')} \right)^2 - \frac{c(k')}{a(k')} \right], \quad (27)$$

y que es ni más ni menos que la cantidad provista gráficamente en el enunciado, figura que repetimos aquí por practicidad.

Dado que, como se vio en clase, la evolución temporal queda descrita por un factor $e^{i\omega t}$, el flujo será inestable si $\text{Im}\{\omega\} \neq 0$, puesto que los autovalores de la ecuación de Rayleigh siempre aparecen de a pares conjugados. Notemos, por tanto, que el flujo será inestable en caso que $k' \in (0, 67; 1, 71)$. Sabemos también que la perturbación inicial introducida en el sistema incluye todos los modos comprendidos en el intervalo $0, 35 < k' < 1, 41$ ³. **Podemos concluir entonces que la perturbación propuesta inestabilizará al flujo.**

Finalmente nos piden determinar qué modo crecerá predominantemente durante los primeros instantes del problema (donde valdrá el régimen lineal). Noten que esto es equivalente a preguntarse

por el modo que alcanza la máxima tasa de crecimiento de la inestabilidad, i.e., el modo que maximiza $\text{Im}\{\omega\}$. Volviendo a variables dimensionadas, vemos en el gráfico que **dicho máximo se alcanza para $k \approx 1, 29/L$ y que dicha tasa de crecimiento será $\omega_{\text{máx}} \approx U_0 \sqrt{g(k'_{\text{máx}})/100}/L \approx 0,16 U_0/L$.**



³Si bien no era relevante para el problema, noten que además tenían todos los modos igual amplitud inicial.

Problema 3

a) Nos piden hallar la relación que debe verificar el potencial $\phi : \mathbf{u} = \nabla\phi$ que describe el campo de velocidades del fluido en la interfaz con la atmósfera. El teorema de Bernoulli para flujos irrotacionales (y escogiendo un *gauge* apropiado), afirma que

$$p(x, z, t) = -\rho [\partial_t\phi(x, z, t) + gz] + p_0, \quad (28)$$

donde se consideró el límite de ondas de baja amplitud (con respecto a su longitud de onda) donde el término u^2 es despreciable frente a $\partial_t\phi$. Usando el modelo propuesto para la discontinuidad en la presión sobre la interfaz ζ , tenemos que

$$p|_{z=\zeta} - p_0 = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + g\zeta \right) = -\sigma \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}. \quad (29)$$

Derivar esta expresión con respecto a t considerando que es posible intercambiar el orden de derivación nos lleva a la relación

$$\rho \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \Big|_{z=\zeta} + g \frac{\partial\zeta}{\partial t} \right) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial\zeta}{\partial t}. \quad (30)$$

Como vimos en teóricas y prácticas, en el límite de ondas de baja amplitud, podemos despreciar la advección de la interfaz y por lo tanto $\partial_z\phi|_{z=\zeta} = u_z|_{z=\zeta} = \partial_t\zeta$. Obtenemos entonces la condición de contorno para el potencial

$$\rho \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta} = \sigma \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial z} \Big|_{z=\zeta}. \quad (31)$$

Vale notar que, a fines de facilitar el tratamiento analítico, puede realizarse un tratamiento a primer orden no nulo en las derivadas evaluadas en $z = \zeta$. Esta estrategia, empleada en todos los ejercicios de las guías de ejercicios, es consistente con el orden de aproximación utilizado hasta el momento y lleva a la condición

$$\rho \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \sigma \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (32)$$

b) Para hallar la relación consideremos que el flujo, además de irrotacional, es incompresible, y por lo tanto el potencial verifica la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (33)$$

Es posible ahora trabajar con la transformada de Fourier de ϕ . Sin embargo, dado que la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno son lineales, cada modo evolucionará de manera independiente. Trabajamos entonces, sin pérdida de generalidad, con un único modo y proponemos

$$\phi = A(z) \cos(kx - \omega t) + B(z) \cos(kx + \omega t), \quad (34)$$

donde se consideraron ondas viajeras tanto en el sentido $+\hat{x}$ como $-\hat{x}$, ya que habrá interferencia entre ambas por la presencia de paredes en los laterales. Noten que la elección de cos o sen para representar estas ondas viajeras resulta indistinta.

Debemos ahora considerar el conjunto de condiciones de contorno que surgen de requerir que se anule la componente normal de la velocidad sobre un contorno sólido en reposo. Esto requiere

$$u_x|_{x=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad u_x|_{x=L} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad u_z|_{z=0} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (35)$$

Las condiciones sobre las paredes laterales podemos evaluarlas aún sin conocer $A(z)$ y $B(z)$ y nos llevan a las condiciones $A = -B$ y $k = k_n = \pi n/L$, por lo que efectivamente tenemos ondas estacionarias cuya amplitud está verticalmente modulada, es decir

$$\phi = C(z) \cos(k_n x) \cos(\omega t). \quad (36)$$

Resolvamos ahora para la amplitud (modulada verticalmente) de las ondas. Para ello, obtenemos de la ecuación de Laplace

$$C(z) = C_I \cosh(k_n z) + C_{II} \sinh(k_n z). \quad (37)$$

Si bien puede mostrarse analíticamente, debería resultar intuitivo que la condición $\partial_z \phi|_{z=0}$ nos lleva a

$$\phi = D \cosh[k_n(z+h)] \cos(k_n x) \cos(\omega t). \quad (38)$$

Esta expresión para ϕ debe verificar también la condición sobre la discontinuidad en la presión hallada en **a)** (bajo la aproximación $|_{z=\zeta} \approx |_{z=0}$), es decir

$$\left[-\rho \omega^2 \cosh(k_n h) + \left(\rho g + k_n^2 \sigma \right) k_n \sinh(k_n h) \right] D \cos(k_n x) \cos(\omega t) = 0, \quad (39)$$

y dado que buscamos soluciones no triviales, obtenemos la relación de dispersión

$$\omega_n^2 = k_n \tanh(k_n h) \left(g + \frac{\sigma}{\rho} k_n^2 \right). \quad (40)$$

Obtuvimos entonces, como era de esperar, un espectro discreto para la frecuencia ω que se reduce a lo hallado en el **Problema 3 de la guía de ejercicios** para el caso $\sigma \rightarrow 0$.

Los efectos de tensión superficial se volverán el mecanismo restitutivo preponderante en la dinámica en el límite en caso que $\sigma k_n^2 / \rho > g$ y por lo tanto el valor umbral para k , k_{um} será

$$k_{\text{um}} = \frac{g\rho}{\sigma}. \quad (41)$$

En rigor, dado que k admite solo valores discretos, podemos obtener el valor asociado n_{um} , que corresponde a

$$n_{\text{um}} = \left\lceil \frac{Lg\rho}{\pi\sigma} \right\rceil, \quad (42)$$

donde $\lceil x \rceil$ denota la función techo de x .

c) Para hallar la forma de la interfaz, podemos utilizar la [ecuación \(29\)](#). En particular, la solución a primer orden podemos obtenerla aproximando, como hicimos anteriormente, $\partial_t \phi|_{z=\zeta} \approx \partial_t \phi|_{z=0}$ y por tanto

$$-\omega_n D \cosh(k_n h) \cos(k_n x) \sin(\omega_n t) = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - g\zeta. \quad (43)$$

Proponiendo como ansatz $\zeta(x, t) = f(t) \cos(k_n x)$ ⁴ encontramos finalmente

$$\zeta(x, t) = \frac{Dk_n}{\omega_n} \sinh(k_n h) \cos(k_n x) \sin(\omega_n t), \quad (44)$$

donde se utilizó la [ecuación \(40\)](#) para simplificar la expresión resultante.

⁴Noten que esto es equivalente a pedir que las oscilación de la interfaz tenga la misma longitud de onda que la del campo de velocidades y que los puntos con velocidad vertical nula para todo tiempo corresponden a puntos donde la interfaz posee siempre altura $z = 0$.