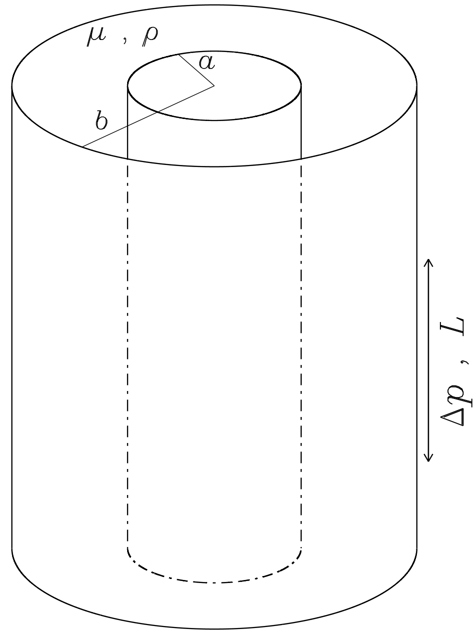
Estructura de la Materia 1 – 2^{do} Parcial

1^{er} Cuatrimestre 2021

Problema 1



Considere el flujo estacionario, incompresible y laminar de un líquido de viscosidad μ y densidad ρ entre dos cilindros concéntricos que pueden considerarse de longitud infinita. Tanto el cilindro interior de radio a como el exterior, de radio b, se encuentran quietos. El fluido se mueve gracias a un gradiente de presiones constante dado por $\Delta p/L$.

a) Proponga la dirección y dependencia espacial para el campo de velocidades más sencillas que resulten compatibles con la situación física presentada. Plantee la ecuación de Navier-Stokes y encuentre la distribución de velocidades.

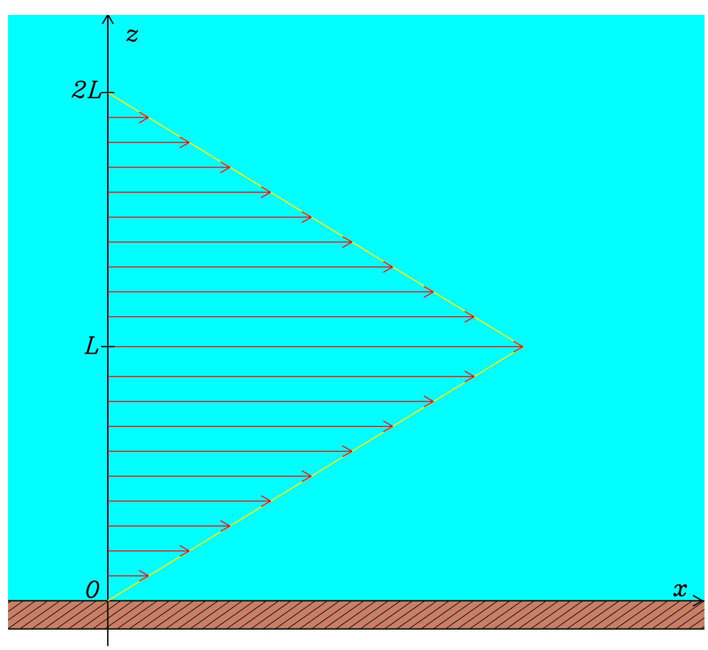
b) Calcule el esfuerzo viscoso sobre el cilindro interior.

c) Usando análisis dimensional, dé una expresión para el punto de máxima velocidad del fluido. ¿Qué puede decirse sobre el esfuerzo viscoso en ese punto? Justifique su respuesta.

Problema 2

Se tiene un fluido ideal con un perfil de velocidades dado por

$$U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z > 2L \\ U_0\left(2 - \frac{z}{L}\right) & \text{si} \quad L < z < 2L \\ U_0\frac{z}{L} & \text{si} \quad 0 < z < L \end{cases} \quad ,$$



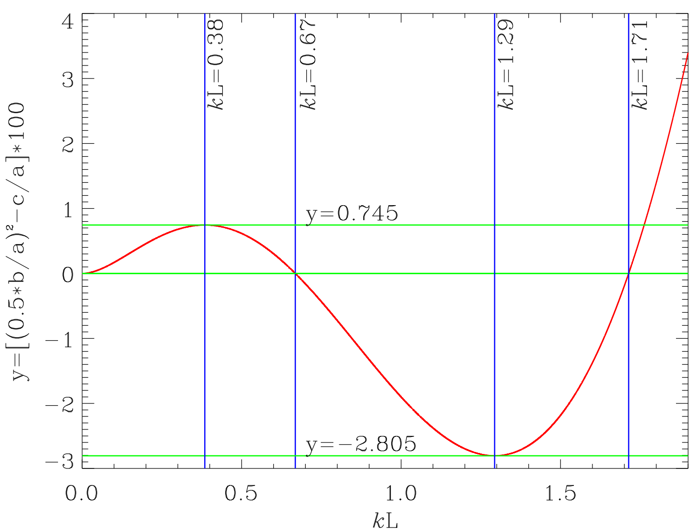
como se muestra en la figura (observe la presencia de un contorno sólido en $z = 0$).

a) Considere una perturbación al campo de velocidades dada por una función de corriente

$$\psi(x,z,t) = \phi(z)e^{ik(x-ct)} \quad , \quad \delta\vec{v} = \vec{\nabla}\psi\times(-\hat{y}) \quad .$$

Escriba la forma que tendrá $\phi(z)$ en cada una de las regiones teniendo en cuenta las condiciones de contorno.

b) Plantee las condiciones de empalme correspondientes de las cuales es posible obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$, pero no calcule esta última.



c) De las condiciones de empalme puede obtenerse una ecuación cuadrática en ω de la forma

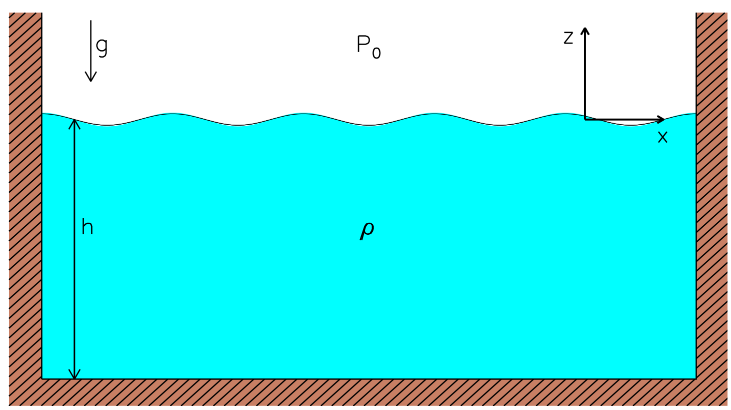
$$\mathrm{a}(kL)\omega^2 + \mathrm{b}(kL)\frac{U_0}{L}\omega + \mathrm{c}(kL)\left(\frac{U_0}{L}\right)^2 = 0 \quad ,$$

donde las funciones de la variable adimensional kL, $\mathrm{a}(kL)$, $\mathrm{b}(kL)$ y $\mathrm{c}(kL)$ son también adimensionales. Considere que el campo de velocidades base se perturba con perturbación inicial $\delta\vec{u}_0(x,z) = \vec{\nabla} \times \psi_0(x,z)(-\hat{y})$, donde

$$\psi_0(x,z) = \int_{k_0 L}^{4k_0 L} \phi_0(z) e^{ikx} L dk \quad , \quad k_0 = \frac{0.35}{L} \quad .$$

En base al gráfico indique si esta perturbación desestabiliza el flujo. En caso de que su respuesta sea afirmativa, encuentre el modo más inestable y la tasa de crecimiento de la inestabilidad.

Problema 3



Considere ondas de gravedad en el límite de baja amplitud para la configuración que se muestra en la figura, donde la distancia entre las paredes es L. Tendremos en cuenta los efectos de la tensión superficial en la interfaz aire-líquido. En un tratamiento linealizado, puede adicionarse el aporte de la tensión superficial considerando que en la interfaz se produce una discontinuidad en la presión dada por

$$p - p_0\big|_{z=\zeta} = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad ,$$

donde σ es la tensión superficial y $z = \zeta$ corresponde a la superficie libre.

a) Escriba la condición que satisface el potencial $\phi(x,z,t)$ en $z = \zeta$.

b) Halle la relación de dispersión para las ondas interfaciales. Según el resultado obtenido, estime un valor umbral de los modos para los cuales los efectos de la tensión superficial se tornan más importantes que los debidos a la gravedad.

c) Encuentre, a primer orden, una expresión para la interfaz $\zeta(x,t)$.