

## Práctica 1: Cinemática e Hidrostática

**Problema 1. Descripciones euleriana y lagrangiana** Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0 \quad , \quad v_z = f(z) \quad ,$$

para  $t \geq 0$  y  $z \geq 0$ . Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

**Problema 2.** Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{\tau} \right) \quad ,$$

donde  $T_0$ ,  $\alpha$ ,  $L$  y  $\tau$  son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad  $U$  constante.

(i) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geoméricamente las componentes de la derivada total.

(ii) Repita el punto (i) para una descripción lagrangiana.

¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

**Problema 3. Trayectorias, líneas de corriente y líneas de trazas** Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en  $(x_0, y_0)$  a  $t = 0$ , para los siguientes campos de velocidades:

(i) Una corriente uniforme  $\vec{u}(x, t) = U\hat{x}$ .

(ii) Una fuente lineal de caudal constante  $\vec{u}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$ .

(iii) Un torbellino con circulación constante  $\vec{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$ .

(iv) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad  $U$  aumenta linealmente con el tiempo.

(v) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad  $U'$  de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período  $\tau$ .

**Problema 4.** Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \quad , \quad v_y(x, y, t) = c \quad ,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  son constantes con las dimensiones apropiadas.

**Problema 5. Deformación de una partícula de fluido** Calcule las deformaciones longitudinales, de corte y volumétricas para los flujos del problema 3.

**Problema 6. Vector ‘Remolino’** Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular  $\vec{\Omega}$ , la vorticidad es  $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$ .

**Problema 7. Cálculo de la vorticidad** Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades:

- (i)  $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$
- (ii)  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
- (iii)  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{r^2/(4\nu t)} \right]$
- (iv)  $v_x = v_0 y/L$

**Problema 8.** Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:

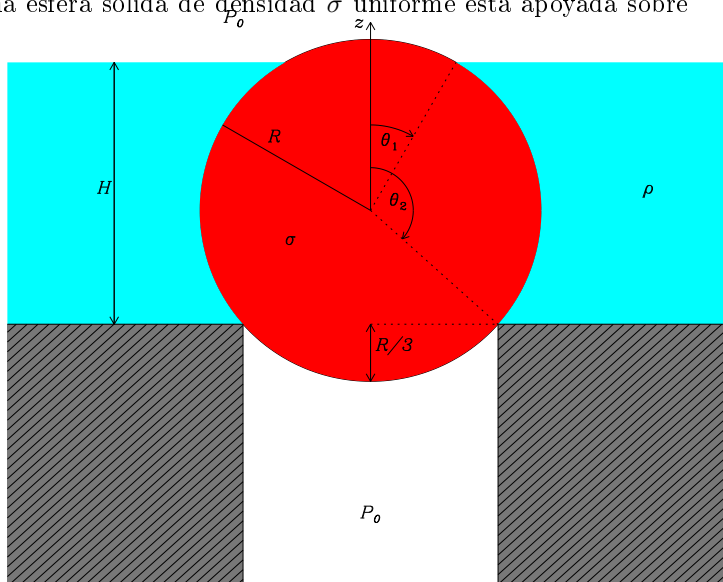
- (i) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.
- (ii) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección  $\hat{z}$ .
- (iii) Idem (ii) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano  $(x, y)$  y contiene al origen, es el mismo.

**Problema 9.** En el semiplano superior ( $y > 0$ ) se tiene un fluido ideal que se mueve acorde con el campo de velocidades  $\vec{v} = \alpha x\hat{x} - \alpha y\hat{y}$ .

- (i) Calcule la trayectoria del elemento de fluido que inicialmente se encuentra en  $(x_0, y_0)$ . Encuentre una expresión  $y = y(x)$  para las líneas de corriente.
- (ii) Si inicialmente la distribución de densidades del fluido es  $\rho_0(x, y) = \lambda x^2 y$ , calcule  $\rho(x, y, t)$  (ayuda: considere que la función densidad es separable en su dependencia temporal y espacial).
- (iii) ¿Cuál es, en el instante  $t_1$ , la densidad del elemento de fluido que inicialmente estaba en  $(x_0, y_0)$ ? ¿A qué se debe el resultado obtenido?
- (iv) Encuentre la distribución de presiones si sobre el fluido actúa una fuerza de volumen  $\vec{F}^M = \alpha^2 \vec{r}$  (fuerza por unidad de masa) y la presión en  $(x_0, y_0)$ ? es  $p_0$ .

**Problema 10. Tapón de pileta** Una esfera sólida de densidad  $\sigma$  uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad  $\rho$ , en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura  $H$  desde el fondo de la pileta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:

- (i) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de  $H$  (tenga en cuenta que el líquido puede tapan o no totalmente a la esfera).
- (ii) Grafique el empuje como función de  $H$  e interprete cualitativamente.
- (iii) Si  $\sigma = \alpha\rho$ , verifique que el valor mínimo de  $\alpha$  para el cual se obtiene obturación para todo  $H$  es  $\alpha = 8/27$ .



**Problema 11. Taquímetro hidrostático** Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio  $R$  y altura  $2H$ , inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con

velocidad angular uniforme  $\Omega$ .

- (i) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
- (ii) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
- (iii) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si  $R = 5$  cm,  $H = 7,5$  cm,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
- (iv) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (iii), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
  - (a) En reposo.
  - (b) Cuando el recipiente rota con frecuencia  $\nu = 90$  rpm.
- (v) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

**Problema 12. Modelo de ciclón** Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio  $a$ , que rota rigidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante  $\Omega$ . Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en  $r = a$ , donde  $r$  es la coordenada radial cilíndrica con el eje  $z$  coincidente con el eje del núcleo.

- (i) Determine el campo de velocidades para todo valor de  $r$ .
- (ii) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo  $r$ , en función de la presión muy lejos del eje  $p_\infty$ . Encuentre qué condición debe satisfacer  $\Omega$  respecto del valor de la presión  $p_\infty$ .

**Problema 13. Placa plana en el seno de un fluido** Una placa plana delgada se encuentra sumergida completamente en un fluido estático de densidad  $\rho$ , de manera que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Asuma que la placa tiene una superficie  $S$  y que su espesor es despreciable (es decir que, a todos los efectos prácticos, la placa es simplemente una superficie). La forma de dicha superficie es arbitraria. En estas condiciones,

- (i) Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las (dos) caras de la placa. Sugerencia: utilice un sistema de coordenadas con origen en  $S$  y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.
- (ii) Elija un sistema de coordenadas centrado en el centro de masa de la placa. Al calcular el punto de aplicación de la fuerza, suponga que la placa tiene una densidad superficial uniforme  $\sigma$  y exprese el resultado en función de los momentos de inercia de la placa.

**Problema 14.** El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación  $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$ , donde  $\rho_0$  es la densidad en ausencia de presión y  $K$  una constante.

- (i) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen  $\vec{F} = g\hat{z}$ , determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en  $z = 0$  es  $\rho = \rho_0$ .
- (ii) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ( $K \rightarrow \infty$ ). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ( $K = 2 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>,  $\rho_0 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>). Desprecie la presión en la superficie.
- (iii) Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado  $p = \rho RT/m$ , con  $R$  la constante universal de los gases y  $m$  la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas  $\vec{F} = -g\hat{z}$ , la presión a una altura  $z$  está dada por

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{mg}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right\} .$$

(iv) Muestre que si  $T$  depende de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

**Problema 15. Modelo simplificado de la atmósfera terrestre** Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura  $z$  sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores  $p_0$ ,  $\rho_0$  y  $T_0$  respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación  $p\rho^{-\gamma} = \text{cte.}$  (atmósfera adiabática).

**Problema 16. Modelo de Acreción en el Medio Interestelar** El mecanismo de acreción esférica es un modelo para la acreción de materia del medio interestelar (ISM) sobre un objeto compacto tal como un agujero negro o una estrella de neutrones. El ISM consiste principalmente de gas y polvo que puede modelarse como un fluido de densidad  $\rho$ , velocidad  $\vec{v}$  y presión  $P$ . Definido así, el sistema es esféricamente simétrico por lo que podremos asumir que todas las variables del fluido dependen de la distancia  $r$  del elemento de fluido al objeto compacto.

(i) Si suponemos que muy lejos del objeto compacto la velocidad del fluido es nula, la velocidad del fluido en acreción tendrá sólo componente radial (porqué?). Considerando un proceso estacionario y usando la ecuación de continuidad, derive la ecuación de conservación del flujo de masa

$$r^2 \rho v = K \quad (K = \text{cte.}) \quad .$$

(ii) Plantee la componente radial de la ecuación de Euler para un ISM en estado estacionario bajo la hipótesis de que la única fuerza que actúa sobre el fluido es la fuerza gravitatoria del objeto compacto de masa  $M$ .

(iii) Utilizando el hecho de que podemos vincular la derivada radial de la presión y la derivada radial de la densidad mediante la relación

$$\frac{dP}{d\rho} = c_s^2 \quad ,$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido en el medio, reescriba la ecuación de Euler en términos de  $v$  y  $\rho$ .

(iv) Usando los resultados de los puntos anteriores obtenga una ecuación diferencial para el campo de velocidades. Sin resolver la ecuación muestre que en el punto crítico

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2} \quad ,$$

debe cumplirse que el campo de velocidades tiene un extremo o que  $v = -c_s$ .

**Problema 17. Estrellas Autogravitantes** Este problema tiene como objetivo modelar la estructura básica de una estrella. Para ello, pensemos que la estrella se compone de una masa de fluido auto-gravitante cuyos elementos se encuentran en equilibrio hidrostático, la presión evitando que la atracción gravitatoria los lleve al colapso. Asumiremos que la configuración posee simetría esférica.

(i) Muestre que, para el fluido que compone la estrella, la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{r} \quad ,$$

siendo  $M(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr$  y  $\hat{r}$  el versor radial en coordenadas esféricas. *Ayuda:* puede resultarle útil recordar que un cascarón esférico de densidad de masa uniforme no ejerce fuerza gravitatoria sobre un punto interno (este resultado, de demostración sencilla, es un teorema debido a Newton).

(ii) Asuma una ecuación de estado politrópica para el gas que compone la estrella, de forma tal que  $p = K\rho^{(n+1)/n}$ , siendo  $n$  el índice politrópico y  $K$  una constante. Obtenga una ecuación diferencial para el campo de densidad de la estrella (pero no la resuelva aún).

(iii) A fin de simplificar la resolución, proponga la siguiente adimensionalización de las variables:

$$r = a\xi \quad , \quad \rho = \rho_c \theta^n \quad ,$$

introduciendo la coordenada radial adimensional  $\xi$  y la función adimensional  $\theta(\xi)$  que representa la densidad de masa normalizada por su valor en el centro de la estrella,  $\rho_c$ . En término de estas nuevas variables, derive una ecuación diferencial para  $\theta(\xi)$ . Simplifique la expresión que obtuvo eligiendo  $a^2 = K(n+1)/(4\pi G\rho_c^{1-1/n})$ .

(iv) Mediante argumentos físicos, determine cuáles son las (dos) condiciones de contorno sobre  $\theta(\xi)$ .

(v) Asumiendo que dispone de una solución  $\theta(\xi)$  a la ecuación, responda qué condición física emplearía para determinar el radio  $R$  de la estrella. Encuentre una expresión para la masa total de la estrella,  $M$ , y otra para el radio  $R$  de la misma.

**Problema 18. Enanas Blancas** Las enanas blancas son remanentes de los núcleos de estrellas gigantes que colapsaron, en las que sólo la presión de degeneración electrónica evita su colapso a un agujero negro. Un gas de electrones (en estados) degenerados responde a una ecuación de estado politrópica con  $n = 3/2$  en el caso no-relativista, y otra en el límite ultra-relativista, en el cual  $n \rightarrow 3$ . Para un gas de electrones degenerados relativistas, la ecuación de estado es

$$p = \frac{1}{4} \hbar c (3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3} \quad ,$$

donde  $n_e$  es la densidad numérica de electrones,  $\hbar$  es la constante de Planck y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. La densidad total  $\rho$  se vincula con el número de electrones mediante  $\rho = n_e \mu_e m_p$ , donde  $m_p$  es la masa del protón y  $\mu_e$  es el peso molecular promedio por electrón en unidades de la masa del protón, y en general depende de la composición química de la estrella. Un valor típico es  $\mu_e = 2$ .

En estas condiciones, y basándose en los resultados obtenidos en el Problema 15, muestre que existe un límite superior para la masa de una enana blanca y exprese dicha masa crítica,  $M_{Ch}$ , denominada masa de Chandrasekhar, en términos de la masa del sol;  $M_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg.