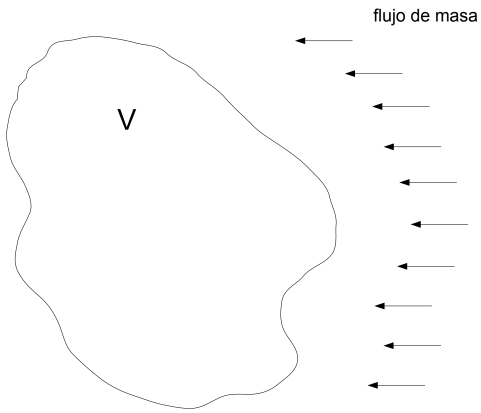
Estructura de la Materia 1 – Práctica 1

Repasemos algunos conceptos que ya vieron en la Teórica. Sabemos que un fluido satisface la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa.



La tasa de cambio de la masa dentro de un volumen fijo V dentro del fluido debe ser igual al flujo de masa a través de la superficie S que encierra al volumen (cambiado de signo), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oiint_S \rho\vec{v}.d\vec{S}$$

Ahora, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_V \vec{\nabla}.(\rho\vec{v})\, dV = 0$$

y como el volumen V es arbitrario podemos asegurar que el integrando es nulo

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0 \quad .$$

Esta última es la ecuación de continuidad, la cual también puede expresarse como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla}.\vec{v}$$

por lo que un fluido es incompresible sí y sólo sí $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$.
Por otro lado la evolución del campo de velocidades del fluido está gobernado por la ecuación indefinida

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right] = \vec{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}$$

que es una especie de segunda ley de Newton para los elementos de fluido que expresa que el cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento (por unidad de volumen, término izquierdo) es igual a las fuerzas aplicadas sobre el elemento de fluido (término derecho). El término $\vec{f}$ representa las fuerzas de volumen que actúan sobre el elemento de fluido (fuerzas por unidad de volumen), mientras que el término $\vec{\nabla}.\overline{\overline{\sigma}}$ corresponde a las fuerzas superficiales, siendo $\overline{\overline{\sigma}}$ el tensor de esfuerzos. En este último término están implícitas todas las características del fluido, el término especifica cómo interactúan los elementos de fluido entre sí, todo el modelado físico del fluido se especifica a través de la forma que adopta el tensor de esfuerzos. El fluido ideal está definido como el fluido en el cual los elementos de fluido no presentan rozamiento, es decir que deslizan perfectamente uno contra otro y sólo "se empujan", es decir que sólo ejercen esfuerzos normales y no tangenciales. En ese caso el tensor de esfuerzos es isótropo, es decir que toma la forma diagonal dada por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad ,$$

siendo p la presión del fluido. Entonces, para un fluido ideal la ecuación indefinida queda como

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \vec{f} \quad ,$$

que se conoce como ecuación de Euler. Ahora, si nos limitamos al caso hidrostático, podemos decir que cualquier fluido en reposo se comporta como si fuera ideal, ya que si no hay movimiento no pueden ejercerse esfuerzos tangenciales. Es decir que para cualquier fluido (ideal o no) en el caso hidrostático podemos usar la ecuación de Euler especificando $\vec{v} = 0$, por lo que

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad ,$$

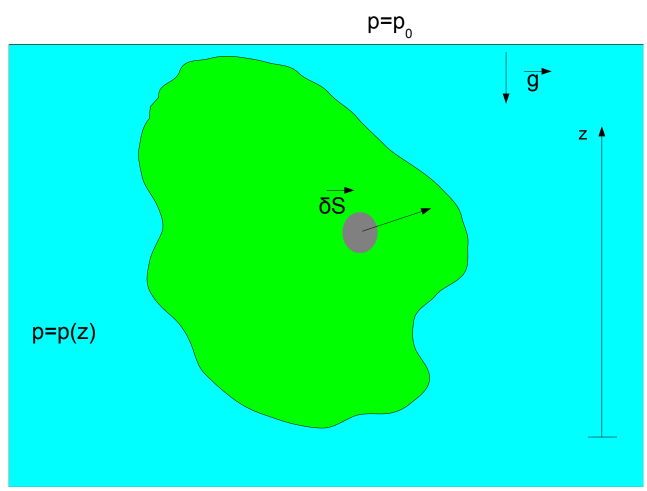
es la ecuación básica de la hidrostática que establece que las fuerzas de volumen que actúan sobre el elemento de fluido deben estar balanceadas por un gradiente de presiones que se establece en el seno del fluido ($\vec{F} \equiv \rho^{-1}\vec{f}$, es una fuerza por unidad de masa).
Yendo al caso particular de un fluido en un campo de fuerzas conservativo, $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$, la ecuación de la hidrostática se reduce a

$$\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \phi\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{\rho} + \phi = \text{cte} \quad .$$

En el caso específico de un fluido de densidad uniforme en presencia de un campo gravitatorio constatnte tendremos

$$p(z) = \text{cte} - \rho g z \quad .$$

En la figura se esquematiza un cuerpo sumergido totalmente en un fluido de densidad ρ, sobre este cuerpo sólido el fluido ejerce una fuerza que se denomina empuje. Veamos que este empuje puede calcularse considerando la presión que ejerce el fluido sobre cada elemento de superficie del cuerpo



$$\delta\vec{E} = -p\delta\vec{S} = -p\check{\boldsymbol{n}}\delta S \quad ,$$

e integrando sobre todo el cuerpo

$$\vec{E} = \oiint_S \delta\vec{E} = -\oiint_S p\check{\boldsymbol{n}}dS$$

Aplicando la versión vectorial del teorema de la divergencia

$$\vec{E} = -\int_v \vec{\nabla} p dV = g \int_V \rho \check{z} dV = Mg\check{z} \quad ,$$

donde M es la masa de fluido desalojado por el cuerpo. En definitiva obtuvimos que el empuje sobre el cuerpo es igual al peso del fluido desalojado, que es el principio de Arquímedes (eureka!).

Problema 10

En este problema debemos ver qué condiciones deben cumplirse para que el tapón esférico obture siempre la cañería, independientemente del caso, ya sea que el tapón esté totalmente o parcialmente cubierto por el agua. Para ello, se sugiere que como primer paso se calcule el empuje sobre el tapón.

i) En nuestro repaso teórico vimos que el empuje que ejerce el fluido sobre un cuerpo se puede calcular a través de una integral de superficie o a través de una integral de volumen, expresión a la que arribamos considerando que el cuerpo se encontraba totalmente sumergido en el fluido, el cual no es el caso en este problema, ya que dependiendo del valor de H, la zona superior de la esfera puede estar o no sumergida y además la parte inferior de la esfera no se encuentra en contacto con el fluido en ningún caso. Por lo tanto calcularemos el empuje mediante la integral de superficie (en realidad también podría calcularse con la integral de volumen, pero prestando especial cuidado a los contornos en los cuales la presión es discontinua). En primer lugar es necesario calcular el perfil de presiones en el líquido. Tenemos un fluido en presencia de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de la hidrostática toma la forma

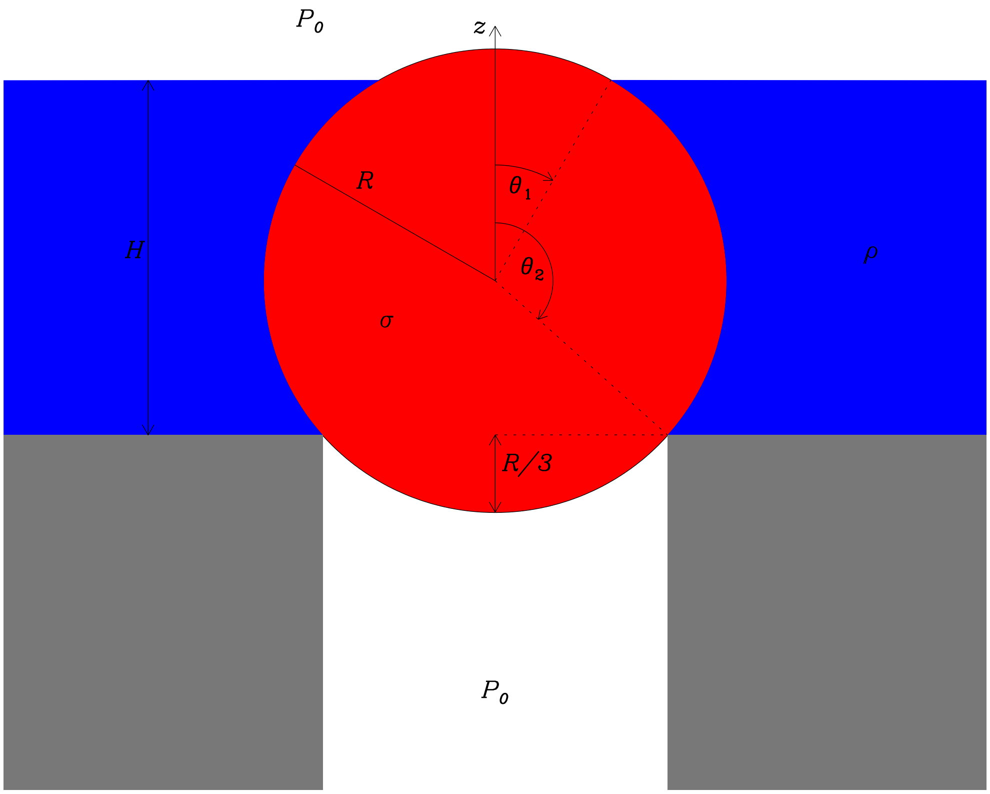
$$\frac{p}{\rho} + \phi = \text{cte} \quad , \quad \phi = gz \Longrightarrow p(z) = \text{cte} - \rho g z \quad .$$

Para especificar la constante necesitamos una condición de contorno, en este caso la condición que tenemos es $p(z = H - \frac{2}{3}R) = p_0$ (observar en el gráfico que elegimos el origen del eje z coincidente con el centro de la esfera); con esta condición, podemos expresar la presión como una función partida

$$p(z) = \begin{cases} p_0 & \text{si } z \geq H - \frac{2}{3}R \\ p_0 + \rho g(H - \frac{2}{3}R - z) & \text{si } -\frac{2}{3}R \leq z \leq H - \frac{2}{3}R \\ p_0 & \text{si } z < -\frac{2}{3}R \end{cases} \quad ,$$

donde puede observarse que elegimos trabajar con el caso de la esfera parcialmente sumergida. Como tendremos que integrar sobre la superficie de la esfera, es más conveniente pasar a coordenadas esféricas (también podría trabajarse con cilíndricas) y llegar a una expresión $p = p(\theta)$ teniendo en cuenta que sobre la superficie de la esfera tenemos que $z = R\cos\theta$

$$p(\theta) = \begin{cases} p_0 & \text{si } \theta \leq \theta_1 \\ p_0 + \rho g(H - \frac{2}{3}R - R\cos\theta) & \text{si } \theta_1 \leq z \leq \theta_2 \\ p_0 & \text{si } \theta > \theta_2 \end{cases} \quad ,$$



donde $\theta_1 = acos(\frac{H}{R} - \frac{2}{3})$ y $\theta_2 = acos(-\frac{2}{3})$ son los que se esquematizan en la figura. Planteando la integral de superficie tenemos

$$\vec{E} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p(\theta)\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_1} p_0\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi - \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[p_0 + \rho g\left(H - \frac{2}{3}R - R\cos\theta\right)\right]\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi - \int_0^{2\pi}\int_{\theta_2}^{\pi} p_0\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \quad .$$

Podemos reagrupar las integrales, viendo que el término constante p_0 aparece en las tres

$$\vec{E} = \overbrace{-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p_0\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi}^{=0} - \int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho g\left(H - \frac{2}{3}R - R\cos\theta\right)\check{\boldsymbol{r}}R^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \quad ,$$

teniendo en cuenta que $\check{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\,\cos\phi\,\check{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\,\sin\phi\,\check{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\,\check{\boldsymbol{z}}$, la nulidad de la primera integral se puede demostrar por cálculo directo, pero también puede usarse el teorema de Gauss para mostrar que $\oiint_S \check{\boldsymbol{n}}\, dS = 0$ cualquiera sea la superficie cerrada S. De la integral que sobrevive, la integración en ϕ anula las componentes $\check{\boldsymbol{x}}$ e $\check{\boldsymbol{y}}$, quedando sólo la componente $\check{\boldsymbol{z}}$, aunque también pueden aducirse argumentos de simetría para anular estas componentes (cuáles?). En definitiva, luego de integrar en ϕ y también en θ

$$\vec{E} = -2\pi\rho g R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(H - \frac{2}{3}R - R\cos\theta\right)\sin\theta\,\cos\theta\, d\theta\check{\boldsymbol{z}} = 2\pi\rho g R^2 \left[\left(H - \frac{2}{3}R\right)\frac{\cos^2\theta}{2} - R\frac{\cos^3\theta}{3}\right]\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad .$$

Evaluando y luego de un trabajo bastante tedioso de reagrupamiento se tiene

$$\vec{E} = \frac{2}{3}\pi\rho g H^2 \left(R - \frac{H}{2}\right)\check{z} \quad , \quad \text{si } 0 \leq H \leq \frac{5}{3}R \quad ,$$

siendo este resultado, como se indica en el rango de valores de H, válido para el caso del tapón parcialmente sumergido.

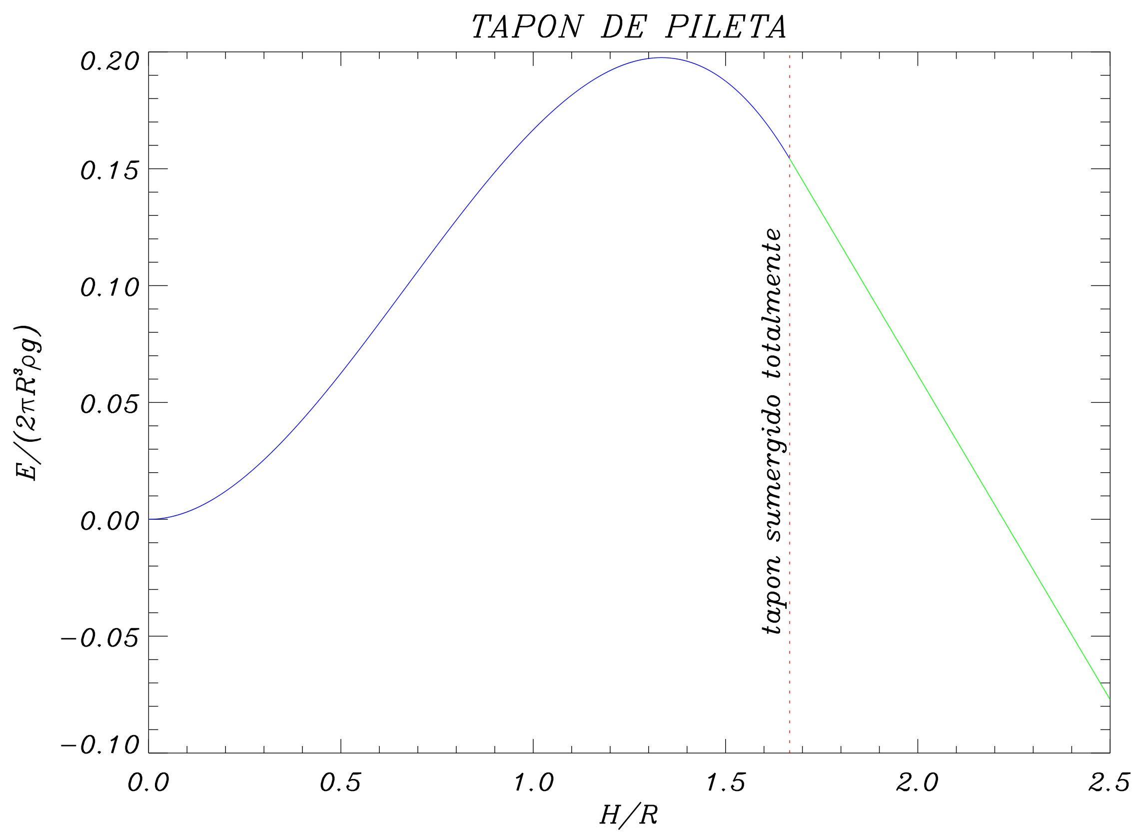
Para el caso del cuerpo totalmente sumergido hay que tener en cuenta que el ángulo θ_1 desaparece como parámetro y se tienen sólo dos intervalos de integración. En definitiva, procediendo de la misma forma que antes se llega a

$$\vec{E} = -2\pi\rho g R^2 \int_0^{\theta_2} \left(H - \frac{2}{3}R - R\cos\theta\right)\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta\check{z} \quad ,$$

y resolviendo se obtiene

$$\vec{E} = \frac{5}{9}\pi\rho g R^2 \left(\frac{20}{9}R - H\right)\check{z} \quad , \quad \text{si } H \geq \frac{5}{3}R \quad .$$

ii) Con las expresiones obtenidas para el empuje en los dos casos, cuerpo parcialmente o totalmente sumergido, graficamos el empuje como función de H. Se tiene el gráfico de una cúbica que empalma perfectamente con el gráfico de una lineal en $H = \frac{5}{3}R$, como se muestra en la figura. Vemos que la curva presenta un máximo



que denominamos E_{max}, calculemos para qué valor de H se obtiene este máximo y cuál es su valor.

$$\frac{\partial E}{\partial H} = \frac{2}{3}\pi\rho g H\left(2R - \frac{3}{2}H\right) \Longrightarrow H = \frac{4}{3}R \Longrightarrow E_{max} = \frac{32}{81}\pi\rho g R^3 \quad .$$

Como cuestión adicional, observe que la curva que representa el empuje toma valores negativos para $H > \frac{20}{9}R$, esto es correcto? qué le dice su intuición? existe algún correlato con su experiencia diaria con tapones y piletas?

iii) Se trata de obtener la densidad mínima que debe tener la esfera para asegurar la obturación, cualquiera sea H. Para ello se expresa la densidad de la esfera como un factor de la densidad del fluido, $\sigma = \alpha\rho$. Sobre el tapón actúan dos fuerzas, la gravitatoria y el empuje que realiza el fluido; para asegurarnos de que haya obturación deberíamos pedir que el peso del tapón siempre fuera mayor al empuje, es decir

$$P > E_{max} \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi\sigma R^3 g = \frac{4}{3}\pi\alpha\rho R^3 g > E_{max} = \frac{32}{81}\pi\rho g R^3 \Longrightarrow \alpha > \frac{8}{27} \quad .$$

Es decir que la densidad del tapón debe ser levemente superior a $\frac{8}{27}$ veces la densidad del fluido para asegurarnos de que el tapón nunca flotará en esta configuración.

Problema 12

Tenemos un modelo de ciclón dado por un núcleo que rota rígidamente y fuera del núcleo un campo de velocidades azimutal e irrotacional.

i) En el núcleo tenemos $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega r \check{\theta}$, mientras que fuera del núcleo tenemos $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, lo cual para un campo azimutal se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \Longrightarrow rv = \text{cte} \Longrightarrow v(r) = \frac{B}{r} \quad .$$

La constante B se obtiene pidiendo continuidad de la velocidad en $r = a$, resultando para el campo de velocidades

$$v(r) = \begin{cases} \Omega r & r \leq a \\ \frac{\Omega a^2}{r} & r \geq a \end{cases} \quad .$$

ii) De la ecuación de Euler tenemos

$$(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad ,$$

y aquí es necesario buscar la expresión para $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$, en coordenadas cilíndricas, dado en el apunte de la página de la materia. Dejamos a los alumnos la resolución de aquí en más de este ítem.

Problema 15

Suponemos que la Tierra es plana (localmente), la gravedad es constante, la atmósfera está en reposo, que el aire es un gas ideal y que la relación entre la presión y la densidad es

$$p\rho^{-\gamma} = \text{constante} \quad , \quad \gamma = c_p/c_v$$

Si tomamos la ecuación fundamental de la hidrostática tenemos

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - g\check{\mathbf{z}}$$

Considerando la relación entre p y ρ, la cual pasamos a escribir como

$$p = p_0\rho_0^{-\gamma}\rho^{\gamma}$$

donde p_0 y ρ_0 son la presión y la densidad al nivel del mar respectivamente ($z = 0$), nos queda una ecuación diferencial para ρ

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = -g \Longrightarrow \frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dz} = -g$$

la cual se integra inmediatamente para obtener

$$\rho(z) = \rho_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}gz\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

De aquí se obtiene la presión en función de z

$$p(z) = p_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}gz\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

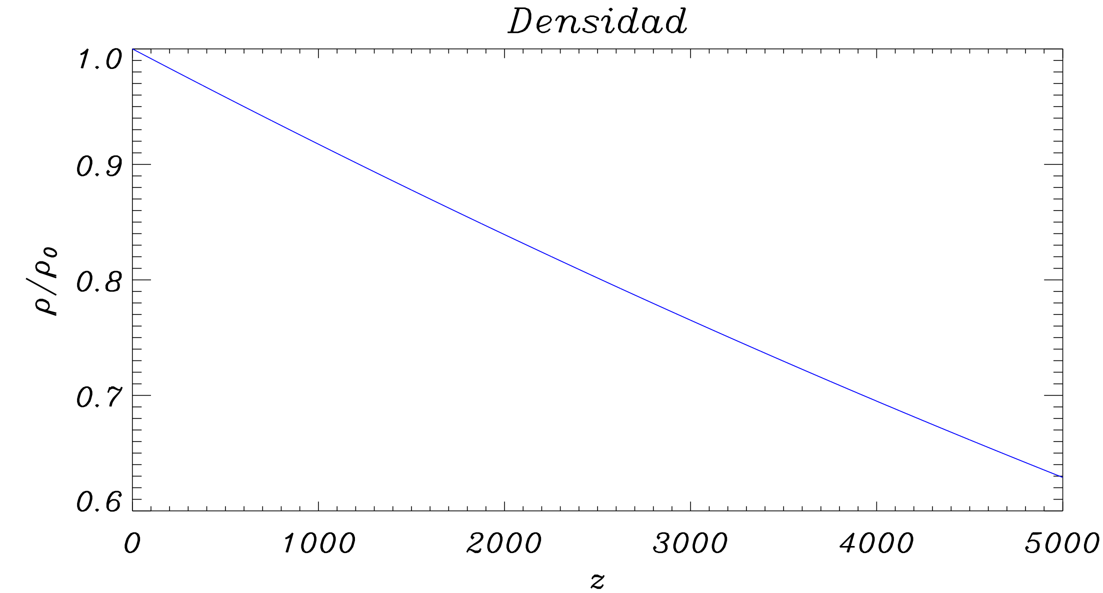
Ahora, si asumimos que el gas es ideal, tenemos la ecuación de estado

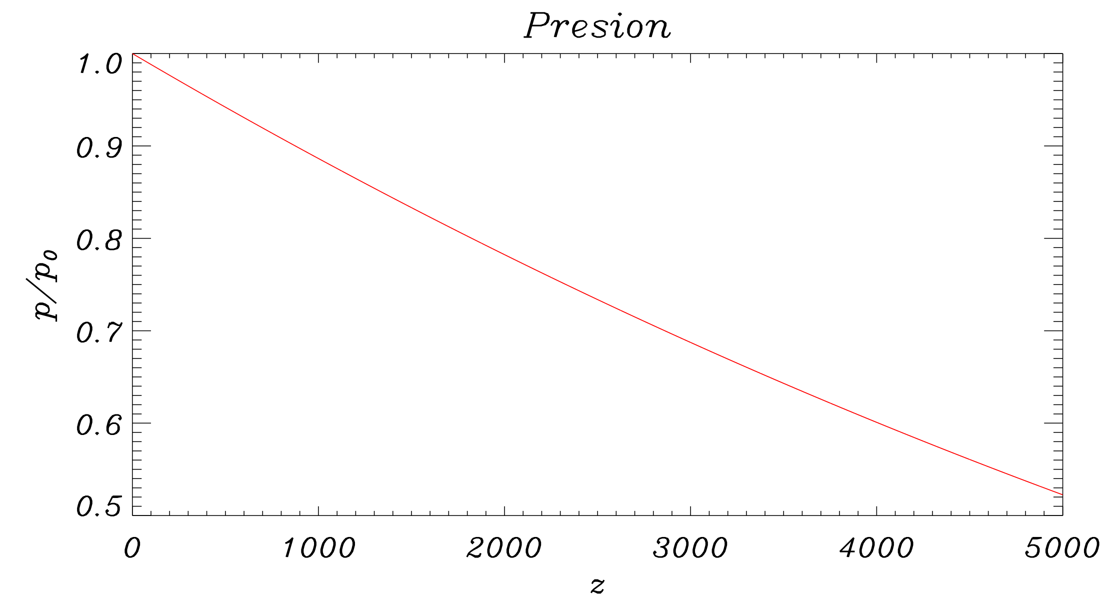
$$p = \frac{R}{m}\rho T$$

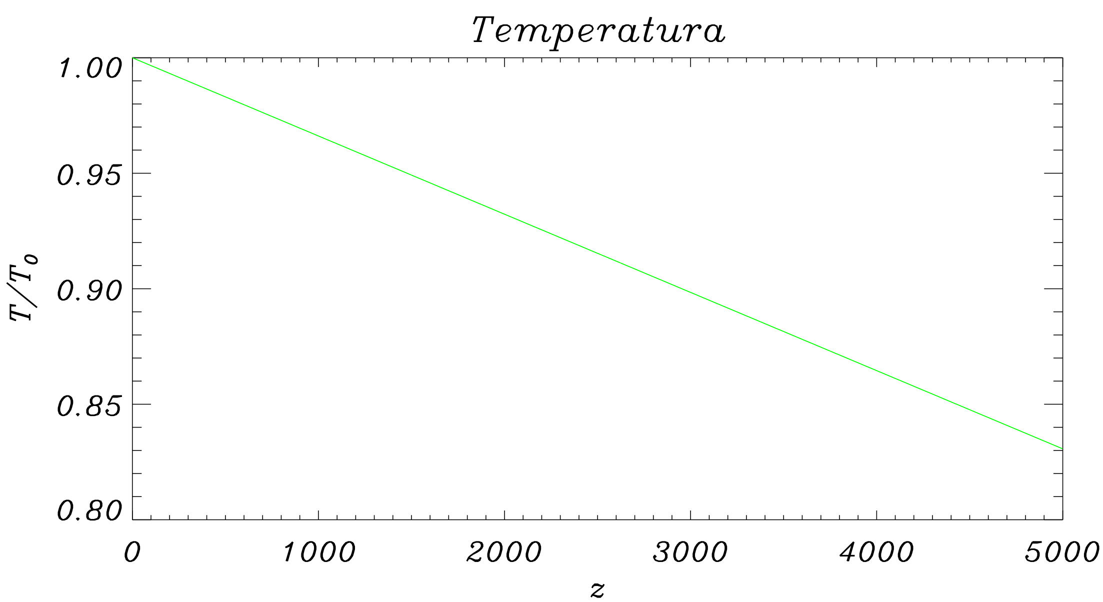
lo que nos permite encontrar la dependencia de la temperatura con la altura

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0}gz\right)$$

donde $T_0 = mp_0/(R\rho_0)$ es la temperatura al nivel del mar.
En el caso de un gas diatómico se tiene que $\gamma = 7/5$, por lo que puede reemplazarse en las expresiones anteriores por ese valor. Para realizar los gráficos tomamos para los valores de las constantes $p_0 = 1014$ HPa, $\rho_0 = 1.225$ kg/m^3 y $g = 9.81$ m/s^2.


Densidad
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
ρ/ρ0
0
1000
2000
3000
4000
5000
z


Presion
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
p/p0
0
1000
2000
3000
4000
5000
z


Temperatura
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
T/T0
0
1000
2000
3000
4000
5000
z