

Estructura de la Materia 1 – Práctica 3

Problemas 3 y 4

En esta práctica consideramos flujos planos, irrotacionales e incompresibles, que si bien son una idealización, pueden aproximar en forma adecuada situaciones reales específicas. Por ser plano, nuestro fluido va a estar descrito por un campo de velocidades de la forma

$$\vec{v} = v_x(x, y)\hat{x} + v_y(x, y)\hat{y} \quad ,$$

aunque en algunas ocasiones será conveniente usar coordenadas polares en lugar de cartesianas. La condición de irrotacionalidad implica

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \implies \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad ,$$

es decir que existe una *función potencial* ϕ de la cual podemos obtener el campo de velocidades. La condición de incompresibilidad nos dice que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \equiv \vec{\nabla} \times (\psi \hat{z}) \quad ,$$

es decir, que el campo de velocidades se puede derivar de una *función corriente* ψ (como $\vec{\psi}$ está definido a menos de un gradiente, sin perder generalidad, podemos usar esta libertad para pedir que siempre el campo $\vec{\psi}$ apunte en \hat{z}). ψ recibe el nombre de función corriente porque es una función que toma un valor constante sobre cada línea de corriente (compruébelo verificando que $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\psi = 0$).

Notemos que así definidas las funciones corriente y potencial, se cumple que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

es decir que ϕ y ψ verifican las condiciones de Cauchy-Riemann lo que además implica que son armónicas. A partir de estas dos funciones podemos definir una función en el plano complejo que llamaremos *potencial complejo* $W(z) = W(x + iy)$

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad .$$

Este potencial complejo verifica

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y \quad ,$$

y la idea es conocer la forma que adopta el potencial complejo para diferentes flujos elementales como corriente uniforme, vórtices, fuentes y sumideros, etc. Veamos algunos ejemplos de potenciales complejos.

Flujo uniforme

Consideremos un flujo uniforme (un campo de velocidades uniforme), con dirección que forma un ángulo α con el eje x

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad , \quad v_y = v_0 \sin \alpha$$

la conexión con el potencial complejo está dada por

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = v_0(\cos \alpha - i \sin \alpha) = v_0 e^{-i\alpha} \implies W(z) = v_0 e^{-i\alpha} z \quad .$$

Vórtice de circulación Γ

Sabemos que la expresión para el campo de velocidades correspondiente a un vórtice en el origen expresado en coordenadas polares es

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \quad ,$$

donde Γ es la circulación del campo de velocidades. A esta altura quizás sea necesario hacer una aclaración, si la circulación del campo es no nula, esto implica

$$0 \neq \Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad ,$$

y este resultado no sería posible si $\vec{\omega}$ fuera idénticamente nulo. Lo que en realidad tenemos es que para todo el plano la vorticidad es nula, excepto para el origen en que se tiene una singularidad, de forma que puede representarse como $\vec{\omega} = \Gamma \delta(\vec{r}) \hat{z}$. De la forma del campo de velocidades y de la expresión del gradiente en cilíndricas tenemos

$$\vec{\nabla} \phi = \left(\hat{r} \partial_r + \frac{\hat{\theta}}{r} \partial_\theta \right) \phi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \implies \phi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad .$$

Por otro lado tenemos para la función corriente

$$\vec{\nabla} \times (\psi \hat{z}) = \left(\frac{\hat{r}}{r} \partial_\theta - \hat{\theta} \partial_r \right) \psi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \implies \psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad .$$

A partir de las expresiones para el potencial y la función corriente tenemos

$$W = \phi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{i\Gamma}{2\pi} [\ln(r) + i\theta] = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(r e^{i\theta}) \implies W(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad .$$

Fuente de caudal Q

El campo de velocidades correspondiente a una fuente en el origen es

$$\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \quad ,$$

donde Q es el caudal de la fuente. Es posible hacer un comentario similar al que hicimos para el vórtice, pero ahora teniendo en cuenta la divergencia en lugar de la vorticidad. Para el potencial planteamos la igualdad

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\theta}}{r}\partial_\theta \right) \phi = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \implies \phi(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad .$$

La función de corriente satisface

$$\vec{\nabla} \times (\psi \hat{z}) = \left(\frac{\hat{r}}{r}\partial_\theta - \hat{\theta}\partial_r \right) \psi = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \implies \psi(r, \theta) = \frac{Q\theta}{2\pi} \quad .$$

Entonces el potencial complejo será

$$W = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i\frac{Q\theta}{2\pi} = \frac{Q}{2\pi} [\ln(r) + i\theta] = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) \implies W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z) \quad .$$

Dipolo de fuente y sumidero

Consideremos un sumidero en el origen y una fuente en \vec{d} , ambos con el mismo caudal volumétrico Q . tomando el límite $|\vec{d}| \rightarrow 0$ y manteniendo constante el vector $Q\vec{d} \equiv \vec{\mu}_Q$ obtenemos el flujo dipolar fuente-sumidero de momento dipolar $\vec{\mu}_Q$. El potencial complejo correspondiente a esta configuración podremos construirlo como la superposición de los flujos correspondientes al sumidero y la fuente (por qué es válido el principio de superposición?) y luego tomando el límite $z_0 \rightarrow 0$, donde z_0 es la representación de \vec{d} en el plano complejo (es decir, si $\vec{d} = (x_0, y_0)$, entonces $z_0 = x_0 + iy_0 = |z_0|e^{i\alpha}$)

$$W(z) = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi} [\log(z - z_0) - \log(z)] = \lim_{z_0 \rightarrow 0} -\frac{Q}{2\pi} \frac{|z_0|e^{i\alpha}}{z} = -\frac{\mu_Q e^{i\alpha}}{2\pi z} \quad ,$$

donde α será el ángulo entre el eje real y la orientación del dipolo. De manera similar se obtiene el dipolo construido con dos vórtices con circulaciones opuestas.

Dipolo de vórtices

$$W(z) = \frac{i\mu_\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi z} \quad ,$$

donde μ_Γ , definido en forma similar al caso anterior, es el momento dipolar de la configuración.

Problema 5

De este problema en adelante consideraremos flujos en presencia de contornos sólidos. En primer lugar consideremos un flujo plano el cual puede ser representado por el potencial complejo $W_0(z)$. Si

a ese flujo le agregamos un contorno sólido dado por un círculo de radio a centrado en el origen (o un cilindro, si pensamos en un flujo tridimensional con simetría de translación en el eje z), el flujo resultante estará descrito por el potencial complejo

$$W(z) = W_0(z) + \overline{W_0}(a^2/z) \quad ,$$

donde la barra sobre el segundo término significa que se conjugan los parámetros del potencial pero no la variable z (otra forma de notarlo es $W_0^*(a^2/z^*)$). Este resultado es el llamado teorema del círculo de Milne-Thomson. Cabe destacar que si $W_0(z)$ es analítica en $|z| < a$, entonces el nuevo término no agrega singularidades en el flujo (o sea, en $|z| > a$)

$$\text{si } |z| > a \implies \left| \frac{a^2}{z} \right| < a \implies \overline{W_0}(a^2/z) \text{ es analítica en } |z| > a \quad .$$

El potencial complejo además de considerar los flujos elementales que lo definen (esto está incluido en el término $W_0(z)$) debe verificar las condiciones de contorno que imponen la presencia de contornos sólidos. Específicamente, los contornos sólidos deben coincidir con líneas de corriente del flujo. En particular, en el caso del círculo de radio a en el origen debemos tener que $|z| = a$ corresponde a una línea de corriente, veamos que el potencial complejo propuesto satisface la condición de contorno

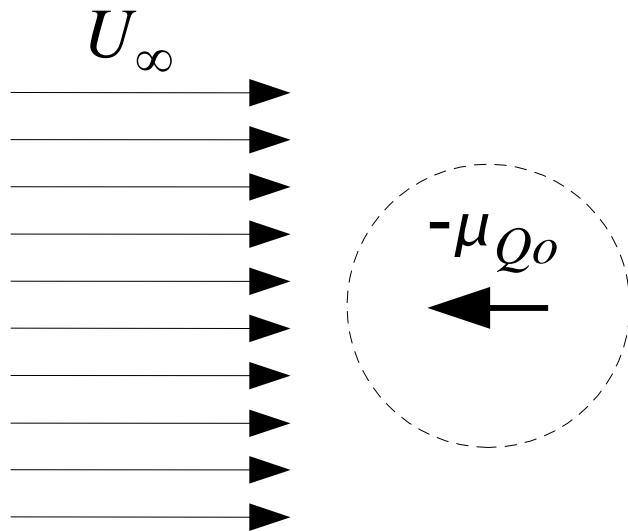
$$\begin{aligned} \text{si } z = a e^{i\theta} \implies W(|z| = a) &= W(a e^{i\theta}) = W_0(a e^{i\theta}) + W_0^*(a^2/(a e^{-i\theta})) = W_0(a e^{i\theta}) + W_0^*(a e^{i\theta}) \\ \implies W(|z| = a) &= 2\Re \{W_0(a e^{i\theta})\} \implies \Im \{W(|z| = a)\} = \psi|_{|z|=a} = 0 \end{aligned}$$

y esta última igualdad implica que $|z| = a$ es una línea de corriente.

i) y ii) En el primer caso, planteamos la configuración correspondiente a una corriente uniforme en el infinito con un dipolo en el origen apuntando en la dirección opuesta. El potencial complejo correspondiente es

$$W(z) = U_\infty z - \frac{\mu_Q e^{-i\pi}}{2\pi z} = U_\infty z + \frac{\mu_Q}{2\pi z} \quad .$$

Por otro lado, tomamos ahora la configuración correspondiente a un flujo uniforme en el infinito con un contorno sólido, un círculo de radio a centrado en el origen.



En este caso, aplicando el teorema del círculo tendremos

$$W(z) = U_\infty z + U_\infty \frac{a^2}{z} \quad ,$$

que comparando con la expresión anterior vemos que tiene la misma forma funcional. Entonces los dos flujos son idénticos si la intensidad del dipolo es

$$\mu_Q = 2\pi U_\infty a^2 \quad .$$

iii) Los puntos de estancamiento son los puntos donde la velocidad es nula. A partir del potencial complejo $W(z)$ encontramos las componentes el campo de velocidades

$$\frac{dW}{dz} = U_\infty - U_\infty \frac{a^2}{z^2} = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = v_x - iv_y \quad ,$$

expresión que se anula cuando $z = \pm a$, estos son los puntos de estancamiento, que están sobre el cilindro.

iv) Tenemos un fluido ideal, estacionario, irrotacional, incompresible en ausencia de fuerzas externas, los teoremas de Bernoulli nos aseguran entonces que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cte} \quad (\text{en todo el fluido}) \quad .$$

Considerando entonces que en el infinito la presión es p_∞ , tenemos que la presión será $p = p_\infty + \rho(U_\infty^2 - v^2)$, y como estamos buscando la presión sobre el contorno sólido debemos evaluar v^2 sobre $|z| = a$

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (v_x - iv_y)(v_x + iv_y) = \frac{dW}{dz} \frac{dW^*}{dz} \\ \implies v^2|_{|z|=a} &= U_\infty^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^* \Big|_{|z|=a} = U_\infty^2 (1 - e^{-2i\theta}) (1 - e^{2i\theta}) = -4U_\infty^2 \sin^2 \theta \quad . \end{aligned}$$

Tenemos entonces para la presión

$$p(\theta) = p_\infty + \rho U_\infty^2 (1 + 4 \sin^2 \theta) \quad .$$

v) Para calcular la fuerza (por unidad de longitud) sobre el cilindro integramos la presión sobre $|z| = a$

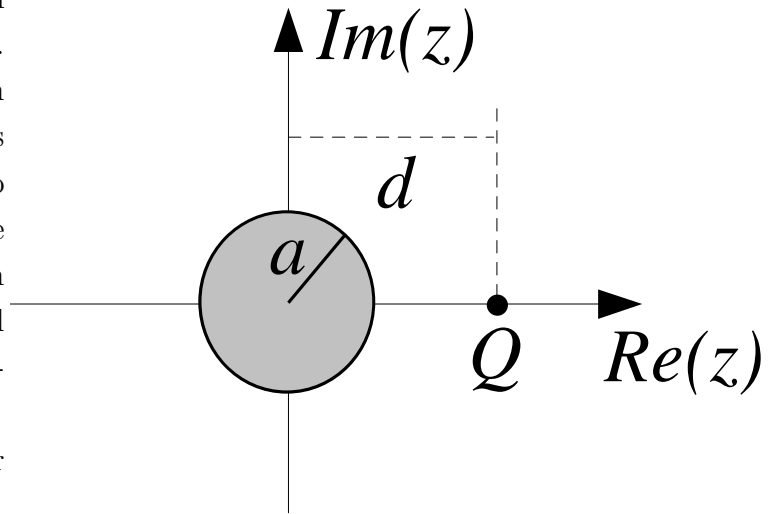
$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \int_0^{2\pi} p(\theta) \hat{r} d\theta = -4U_\infty^2 \rho \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta \cos \theta \hat{x} + \sin^3 \theta \hat{y}) d\theta \quad , \\ \implies \vec{F} &= -4U_\infty^2 \rho \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \hat{x} + \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \hat{y} \right] \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Problema 7a

Como un ejemplo más de la utilización del teorema del círculo vamos a resolver este ejercicio

i) En este ítem nos piden que hagamos un dibujo cualitativo de las líneas de corriente. Para ello debemos pensar cómo se modificarán las líneas de corriente de una fuente, las cuales son radiales, ante la presencia de un objeto sólido a su izquierda. Las líneas de corriente que tracen a mano en forma intuitiva podrán compararse con las exactas luego de escribir el potencial complejo y utilizar MathLab, Mathematica o programa similar para graficarlas.

ii) Usamos el teorema del círculo para escribir el potencial complejo



$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - d) + \ln(a^2/z - d)] = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - d) + \ln(a^2 - zd) - \ln z] \quad .$$

iii) Debemos encontrar los puntos de estancamiento, es decir los puntos en donde se anula la velocidad. Por simple inspección y argumentos de simetría podemos afirmar que $z = \pm a$ son puntos de estancamiento, porque en ambos puntos v_x debe ser nula porque el vector velocidad debe ser tangente al contorno sólido. Pero por otro lado también v_y debe anularse en ambos puntos (y sobre todo el eje real), porque existe simetría de reflexión respecto del eje x . Fuera de esta argumentación, veamos cómo determinamos los puntos de estancamiento por cálculo directo, para ello calculemos las componentes de la velocidad

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - d} + \frac{1}{z - a^2/d} - \frac{1}{z} \right) \quad ,$$

sacando denominador común

$$v_x - iv_y = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{z(z - a^2/d) + z(z - d) - (z - d)(z - a^2/d)}{z(z - d)(z - a^2/d)} \right] = \frac{Q}{2\pi} \frac{z^2 - a^2}{z(z - d)(z - a^2/d)} \quad ,$$

y evidentemente esta expresión se anula en $z = \pm a$.

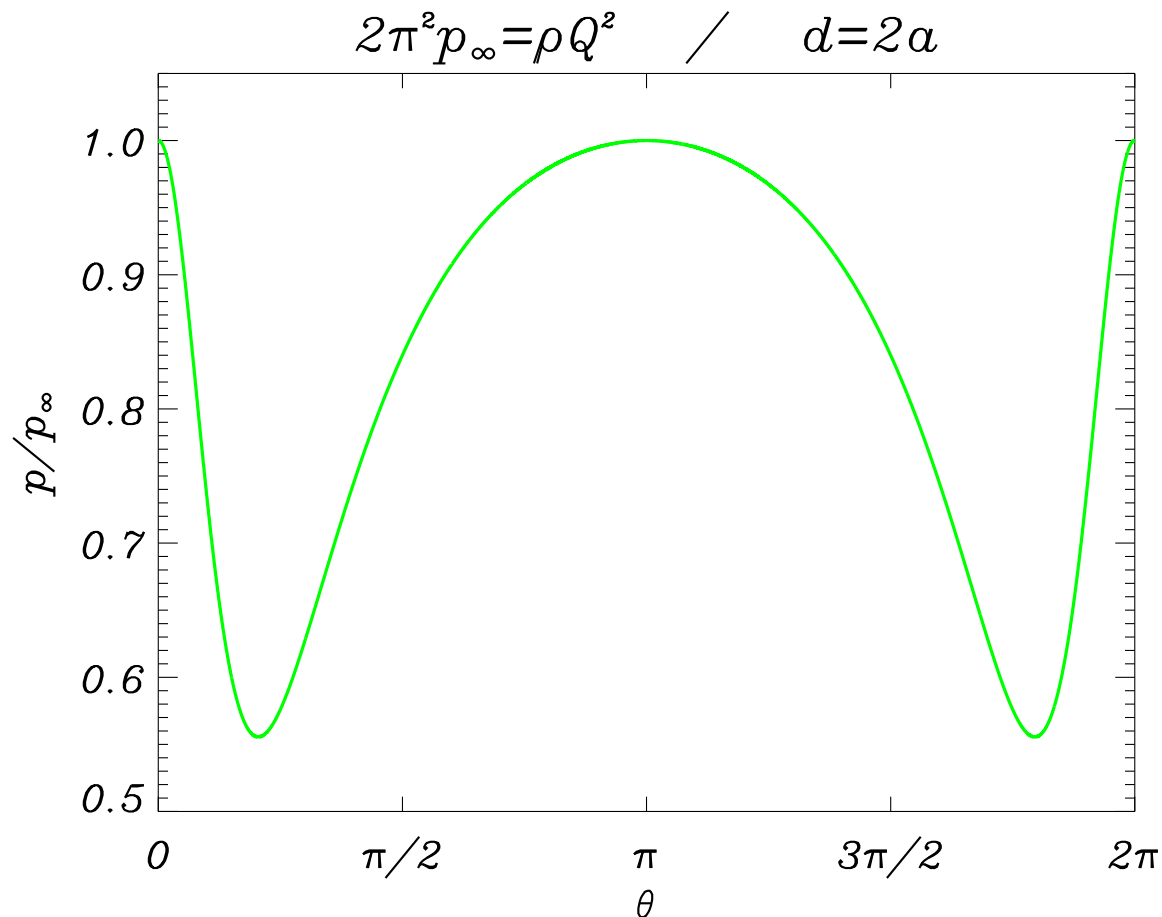
iv) Sobre el contorno sólido, $z = a e^{i\theta}$

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=ae^{i\theta}} = \frac{Q}{2\pi} \frac{a^2(e^{2i\theta} - 1)}{a(e^{i\theta} - d/a)a(e^{i\theta} - a/d)ae^{i\theta}} = \frac{Q}{2\pi} \frac{2i \sin \theta}{ae^{2i\theta} - (a^2/d)e^{i\theta} - de^{i\theta} + a} \quad ,$$

$$\left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=ae^{i\theta}} = \frac{Q}{\pi} \frac{i \sin \theta}{e^{i\theta}(2a \cos \theta - a^2/d - d)} = \frac{Q}{\pi} \frac{\sin^2 \theta + i \sin \theta \cos \theta}{(2a \cos \theta - a^2/d - d)} = v_x - iv_y|_{z=ae^{i\theta}} \quad .$$

Considerando que al infinito la velocidad es nula y la presión es p_∞

$$p|_{z=ae^{i\theta}} = p_\infty - \rho \frac{v^2}{2} \Big|_{z=ae^{i\theta}} = p_\infty - \frac{Q^2 \rho}{2\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{(2a \cos \theta - a^2/d - d)^2} \quad .$$



Para hacer un gráfico de la presión sobre el contorno sólido, establecemos una relación entre los parámetros que definen la configuración, tomamos $2\pi^2 p_\infty = \rho Q^2$ y además $d = 2a$. Puede verse que los máximos de presión coinciden con los puntos de estancamiento, es decir $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.