

## Estructura de la Materia 1 – Práctica 3

### Problema 8

Para este ejercicio usaremos el teorema de Blasius que nos permite calcular la fuerza sobre un contorno sólido ejercida por un flujo plano incompresible e irrotacional. Si definimos la fuerza compleja como  $F = F_x + iF_y$ , el teorema de Blasius establece que

$$F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad ,$$

siendo  $\mathcal{C}$  el contorno del sólido. La utilidad de este resultado radica en que, en general, resolver esta integral es más sencillo que integrar la presión sobre el contorno sólido. Antes de utilizar este resultado quizás sea útil recordar brevemente un poco la teoría de análisis complejo que nos permitirá calcular la integral planteada por el teorema de Blasius. Recordemos que además del desarrollo en serie de Taylor en el entorno de un punto  $z_0$  en donde una función  $f(z)$  es analítica (al igual que en análisis real)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad ,$$

existe, en forma complementaria, el desarrollo en serie de Laurent alrededor de una singularidad  $w_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - w_0)^{-n} \quad .$$

Se define el coeficiente  $b_1$  como el residuo de  $f(z)$  en la singularidad  $w_0$ , simbólicamente se nota  $b_1 = \mathcal{R}es[f, w_0]$ . A partir de estas definiciones, estamos en condiciones de escribir (más no demostrar) un importante resultado del análisis complejo

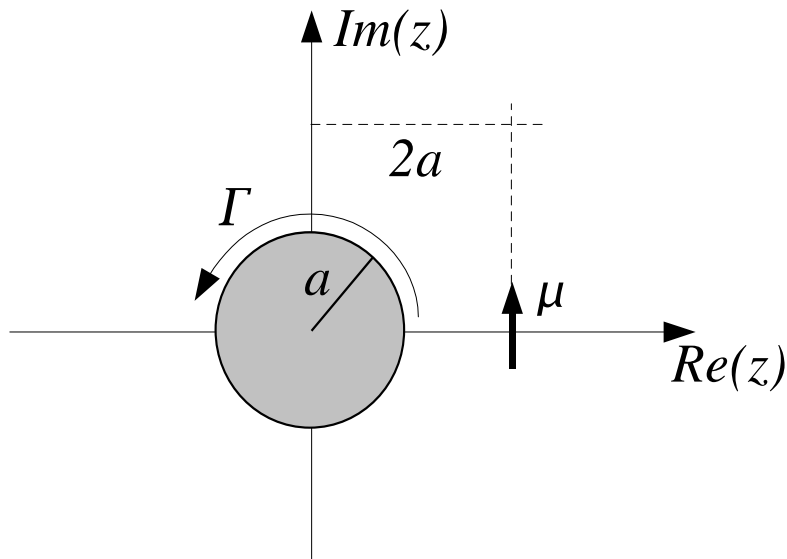
$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \mathcal{R}es[f, z_k]$$

donde la suma se extiende sobre todas las singularidades  $z_k$  de  $f(z)$  interiores al contorno  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto, para calcular fuerzas sobre contornos sólidos usando el teorema de Blasius sólo nos basta conocer el desarrollo en serie de Laurent de  $\left( \frac{dW}{dz} \right)^2$  alrededor de cada singularidad interna a la curva  $\mathcal{C}$ . Otro resultado útil del análisis complejo que sería bueno recordar es el teorema integral de Cauchy generalizado

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \quad ,$$

que es una expresión integral para la derivada de orden  $n$  de  $f(z)$  en un punto analítico  $z_0$ .

Luego de este breve repaso creo que ya estamos en condiciones de encarar el problema planteado. Se



tiene un dipolo frente a un cilindro centrado en el origen el cual tiene una circulación atrapada  $\Gamma$ . Supondremos que el dipolo (fuente-sumidero) tiene una orientación cualquiera, es decir que forma un ángulo genérico  $\alpha$  con la horizontal. Se pide calcular la intensidad y orientación del dipolo para que la fuerza neta sobre el contorno sólido sea nula.

Entonces, como primer paso, debemos encontrar la expresión para el potencial complejo  $W(z)$

$$W(z) = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z-2a)} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z) - \frac{\mu e^{-i\alpha}}{2\pi(a^2/z-2a)},$$

donde el primer término corresponde al dipolo, el segundo a la circulación atrapada  $\Gamma$  y el tercero a aplicar el teorema del círculo al término del dipolo (¿por qué no debe aplicarse el teorema a la circulación atrapada?). Ahora derivamos esta expresión para poder usar el teorema de Blasius, no sin antes reescribir el tercer término en una forma un poco más amigable

$$\frac{1}{a^2/z-2a} = \frac{z}{a(a-2z)} = -\frac{1}{2a} \frac{z}{z-a/2} = -\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{a/2}{z-a/2}\right),$$

y tratándose  $W(z)$  de un potencial podemos desestimar el término constante. Es una buena práctica, o al menos yo lo considero así, tratar de llevar los términos racionales del potencial a la forma  $\frac{A}{z-z_0}$ . Tenemos entonces

$$W(z) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\mu e^{i\alpha}}{z-2a} + i\Gamma \ln z - \frac{\mu e^{-i\alpha}}{4(z-a/2)} \right] \Rightarrow \frac{dW}{dz} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\mu e^{i\alpha}}{z-2a} - \frac{i\Gamma}{z} - \frac{\mu e^{-i\alpha}}{4(z-a/2)^2} \right].$$

Por el teorema de Blasius tenemos

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \frac{1}{4\pi^2} \oint_C \left[ \frac{\mu e^{i\alpha}}{(z-2a)^2} - \frac{i\Gamma}{z} - \frac{\mu e^{-i\alpha}}{4(z-a/2)^2} \right]^2 dz$$

Podemos notar que de las tres singularidades que aparecen en el potencial tenemos dos interiores a la curva ( $z = 0$  y  $z = a/2$ ) y una exterior ( $z = 2a$ ). Cuando calculemos el cuadrado de la derivada del potencial tendremos términos elevados al cuadrado y términos cruzados. Los términos elevados al cuadrado por ser de la forma  $(z - z_0)^{-2}$  o  $(z - z_0)^{-4}$  no aportan residuo (aunque sea  $z_0$  una singularidad interna a la curva). Por otro lado se puede demostrar (¡inténtelo!) que de los términos cruzados sólo aportan a la integral los que involucran una singularidad externa con una interna. En nuestro caso particular, sólo dos términos cruzados son los que darán un aporte neto, la singularidad externa en  $z = 2a$  con cada uno de los dos términos con singularidades internas

$$F_x - iF_y = -\frac{i\rho}{4\pi^2} \oint_C \left[ \frac{\mu^2}{4(z - a/2)^2(z - 2a)^2} + \frac{\mu i \Gamma e^{i\alpha}}{z(z - 2a)^2} \right] dz \quad . \quad (1)$$

Llegados a este punto, no queda otra que calcular las integrales. Para ello podemos proceder de al menos dos formas diferentes, por un lado podemos desarrollar en fracciones simples cada uno de los dos términos, por otro se puede usar el teorema generalizado de Cauchy.

Con fracciones simples resolvamos la integral del segundo término

$$\frac{1}{z(z - 2a)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2a} + \frac{C}{(z - 2a)^2} = \frac{A(z - 2a)^2 + Bz(z - 2a) + Cz}{z(z - 2a)^2} \quad ,$$

y comparando la expresión inicial con la última podemos establecer ecuaciones evaluando en diferentes valores de  $z$  el numerador

$$\begin{cases} z = 0 \implies 1 = 4a^2 A \implies & A = \frac{1}{4a^2} \\ z = 2a \implies 1 = 2aC \implies & C = \frac{1}{2a} \\ z = a \implies 1 = Aa^2 - Ba^2 + Ca \implies & B = -\frac{1}{4a^2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral puede reescribirse en fracciones simples como

$$\oint_C \frac{1}{z(z - 2a)^2} dz = \oint_C \left[ \frac{1}{4a^2 z} - \frac{1}{4a^2(z - 2a)} + \frac{1}{2a(z - 2a)^2} \right] dz = 2\pi i \frac{1}{4a^2} \quad ,$$

donde vemos que el primer término es el único que aporta a la integral (la singularidad interna  $z = 0$ ). Nos queda todavía calcular el primer término en la integral de la Ec. (1), para este término usemos el otro método propuesto, el teorema generalizado de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{(z - a/2)^2(z - 2a)^2} dz = \oint_C \overbrace{\frac{(z - 2a)^{-2}}{(z - a/2)^2}}^{f(z)} dz = 2\pi i f'(z = a/2) = 2\pi i \left[ \frac{-2}{(z - 2a)^3} \right] \Big|_{z=a/2} = \frac{i32\pi}{27a^3} \quad ,$$

Donde usamos que dentro del contorno de integración  $f(z) = (z - 2a)^{-2}$  es analítica. En la resolución de las integrales uno usará para cada término el método que le resulte más cómodo. Juntando los

resultados, llegamos a la expresión para la fuerza

$$F_x - iF_y = -\frac{i\rho}{4\pi^2} \left( \frac{\mu^2}{4} \frac{i32\pi}{27a^3} + i\mu\Gamma e^{i\alpha} \frac{i\pi}{2a^2} \right) = \frac{\mu\rho}{8\pi a^2} \left( \frac{16\mu}{27a} + i\Gamma e^{i\alpha} \right) .$$

Si pedimos que la fuerza sea nula, eso nos determina la orientación e intensidad del dipolo

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \mu = \frac{27}{16} a\Gamma .$$

## *Apostilla*

Llegados a este punto, teniendo en cuenta que los ejercicios planteados en la práctica corresponden a flujos estacionarios, los estudiantes podrían plantearse el problema de un flujo plano, incompresible e irrotacional dado por singularidades dependientes del tiempo. Por ejemplo, podría tenerse un flujo uniforme al infinito pero cuya magnitud decreciera exponencialmente con el tiempo, es decir algo de la forma

$$U_\infty(t) = U_0 e^{-t/\tau} \quad ,$$

o podríamos tener una fuente pulsante, es decir una fuente de caudal  $Q$  modulada por una función  $\cos(\omega t)$ . En esos casos cabe preguntarse si las soluciones a las que arribamos para flujos estacionarios siguen siendo válidas con el simple reemplazo de los parámetros constantes por sus versiones dependientes del tiempo (reemplazo de  $U_0$  por  $U_0 e^{-t/\tau}$  en el ejemplo anterior). De considerarse que efectivamente esas serían las soluciones en el caso no estacionario, podríamos preguntarnos cuáles serían las implicancias de estas soluciones y a qué propiedades físicas del fluido se deberían las mismas.

## Problema 11

En este problema nos plantean una transformación conforme o mapeo conforme que lleva un círculo centrado en el origen a un segmento sobre el eje real. Sólo los flujos más sencillos pueden ser analizados en el plano complejo como lo hicimos hasta ahora, para algunos flujos más complicados existen mapeos en el plano complejo que pueden resultar útiles. Por ejemplo, transformando el flujo alrededor de un cilindro a través de una función de mapeo de un plano en otro, se pueden determinar algunos flujos complejos como el flujo alrededor de un ala o entre las paletas de una bomba centrífuga, o en una turbina. Tendremos un mapeo del plano  $w$  en el plano  $z$  mediante la relación  $z = f(w)$ , nos interesarán las transformaciones conformes, las cuales si las caracterizamos gráficamente serán las que conservan la magnitud y el sentido de los ángulos, y si queremos una definición con más rigor matemático diremos que una transformación  $f(w)$  es conforme en  $w_0$  si  $f(w)$  es holomorfa en  $w_0$  y además  $f'(w_0) \neq 0$ .

i) Consideremos ahora la función de mapeo (que es básicamente la planteada en el problema)

$$z = f(w) = w + \frac{a^2}{w} \quad (a > 0) \quad ,$$

conocida como transformación de Joukowski. Veamos que mapea el círculo  $|w| = a$  en un segmento sobre el eje real

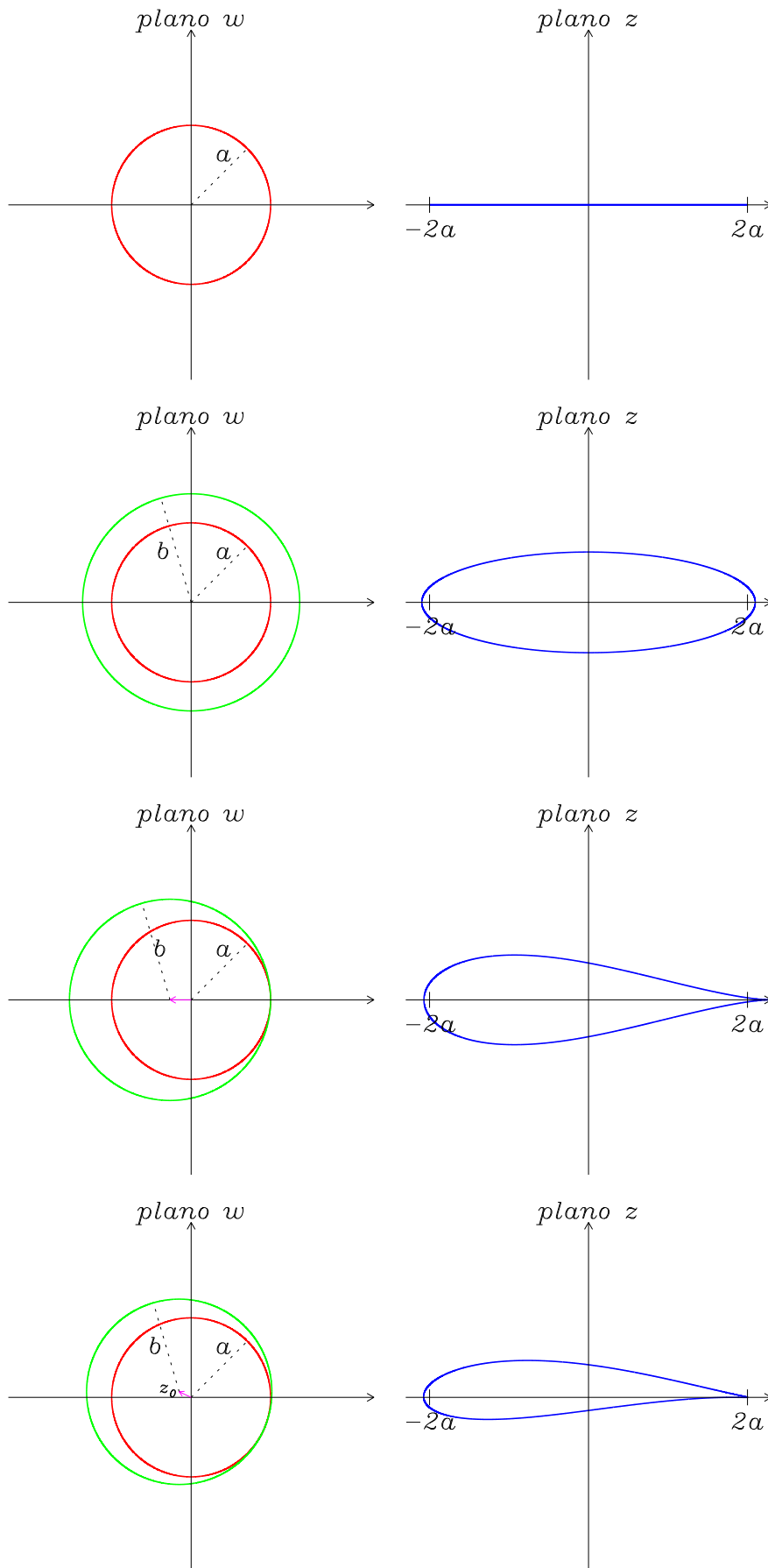
$$z = w + \frac{a^2}{w} \Big|_{w=ae^{i\theta}} = ae^{i\theta} + \frac{a^2}{ae^{i\theta}} = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a \cos \theta \quad .$$

Para puntos fuera del plano  $w = r e^{i\theta}$  con  $r > 1$  tenemos

$$z = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \quad ,$$

que generan todo el resto del plano  $z$ .

En la figura de la siguiente página podemos ver la transformación de Joukowski sobre distintas curvas en el plano  $w$ . En primer lugar la ya referida, sobre  $|w| = a$  que da lugar al segmento en el plano  $z$ . A continuación sobre el círculo  $|w| = b$ , con  $b > a$ , que da lugar a una elipse en el plano  $z$ .



Luego un círculo descentrado, desplazado sobre el eje real y tangente a  $|w| = a$ , es decir el círculo  $|w - x_0| = b$ , que da lugar en el plano  $z$  a un perfil alar simétrico. Por último, un círculo desplazado a  $w_0$  de radio  $b$  tangente con  $|w| = a$ , es decir el círculo  $|w - w_0| = b$ . En este caso obtenemos un perfil alar asimétrico.

Ahora continuaremos con los ítems del Problema 11, pero más adelante retornaremos al ejemplo del perfil alar asimétrico.

**ii y iii)** Para la configuración en el plano  $w$  tendremos un flujo uniforme en el infinito con inclinación  $\alpha$  respecto del eje real y un cilindro de radio  $a$  centrado en el origen, por lo que el potencial complejo es

$$\mathcal{W}(w) = U_\infty \left( w e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{w} e^{i\alpha} \right) .$$

En el plano  $z$  tenemos para el campo de velocidades la relación

$$v_x - iv_y = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \left( \frac{dz}{dw} \right)^{-1} = U_\infty \left( \frac{e^{-i\alpha} - a^2 w^{-2} e^{i\alpha}}{1 - a^2 w^{-2}} \right) ,$$

y si evaluamos sobre el contorno,  $|w| = a$

$$(v_x - v_y)|_{w=ae^{i\theta}} = U_\infty \left( \frac{e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha} e^{-2i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} \right) = U_\infty \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} .$$

El centro del segmento corresponde a  $w = \pm i$ , entonces  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \implies v_x - iv_y = U \frac{\sin(\pm\pi/2 - \alpha)}{\pm \sin(\pi/2)} = U \cos \alpha .$$

También puede verse que si  $\alpha \neq 0$  entonces  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  corresponden a puntos donde la velocidad diverge.

Para encontrar la expresión del potencial de velocidades y la función de corriente en el plano  $z$  en primer lugar debemos expresar el potencial complejo en función de  $z$  entonces, basándonos en la transformación conforme

$$z = w + \frac{a^2}{w} \implies w^2 - wz + a^2 = 0 \implies w = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} ,$$

quedándonos con la solución positiva que verifica  $w \sim z$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Entonces el potencial complejo en el plano  $z$  será

$$W(z) = U_\infty \left[ \left( \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} \right) e^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2}} \right]$$

$$W(z) = U_\infty \left[ \left( \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} \right) e^{-i\alpha} + \left( \frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} \right) e^{i\alpha} \right] .$$

Como segundo paso, es necesario separar en parte real e imaginaria para identificar el potencial de velocidades y la función corriente. El término problemático es  $\sqrt{z^2/4 - a^2}$ , podemos deshacernos de la raíz tomando logaritmo y luego exponencial

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} &= \frac{1}{2} \exp \left[ \ln \left( \frac{z^2}{4} - a^2 \right) \right] \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{z^2}{4} - a^2} &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{x^2 - y^2 - 4a^2}{4} \right)^2 + \left( \frac{xy}{2} \right)^2 \right] + i \arctan \left( \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4a^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

De aquí ya es inmediato tomar parte real e imaginaria de la última expresión, y por lo tanto poder escribir el potencial de velocidades y la función de corriente (dejamos esto como tarea para el alumno). Volviendo al resultado del ejercicio, en que observábamos que en el flujo transformado, si el ángulo de ataque  $\alpha$  es no nulo, aparecían puntos donde la velocidad diverge, lo cual no es aceptable físicamente. A partir de los trabajos de Kutta y Joukowski fue posible establecer que cuando en un flujo uniforme se coloca un cuerpo en forma asimétrica respecto del flujo se origina una circulación en su contorno. La asimetría puede deberse a que el flujo incide con un cierto ángulo de ataque y/o que el perfil tenga cierta asimetría. En la interacción del cuerpo con el fluido en que está inmerso se observa un primer punto de estancamiento en el borde de ataque (lado desde el que viene el flujo), y conforme se agudiza el borde de salida (lado opuesto al flujo), un segundo punto de estancamiento se desplaza hacia el borde de salida. A partir de esto puede establecerse la condición de Kutta como: *un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido y tiene un borde de salida agudo, genera alrededor de sí mismo una circulación cuya intensidad es la suficiente para llevar el segundo punto de estancamiento al borde de salida*. Matemáticamente, esa condición para el perfil alar asimétrico que mostramos en el último gráfico de la figura anterior es

$$\left. \frac{d\phi}{d\theta} \right|_{\theta=-\beta, r=b} = 0 \quad ,$$

donde  $b$  es el radio del cilindro en el plano  $w$  y  $\beta$  el ángulo comprendido entre el eje real y el radio vector que une  $a$  con  $z_0$ . Teniendo en cuenta la expresión del potencial en el plano  $w$ , suponiendo un ángulo de ataque arbitrario  $\alpha$

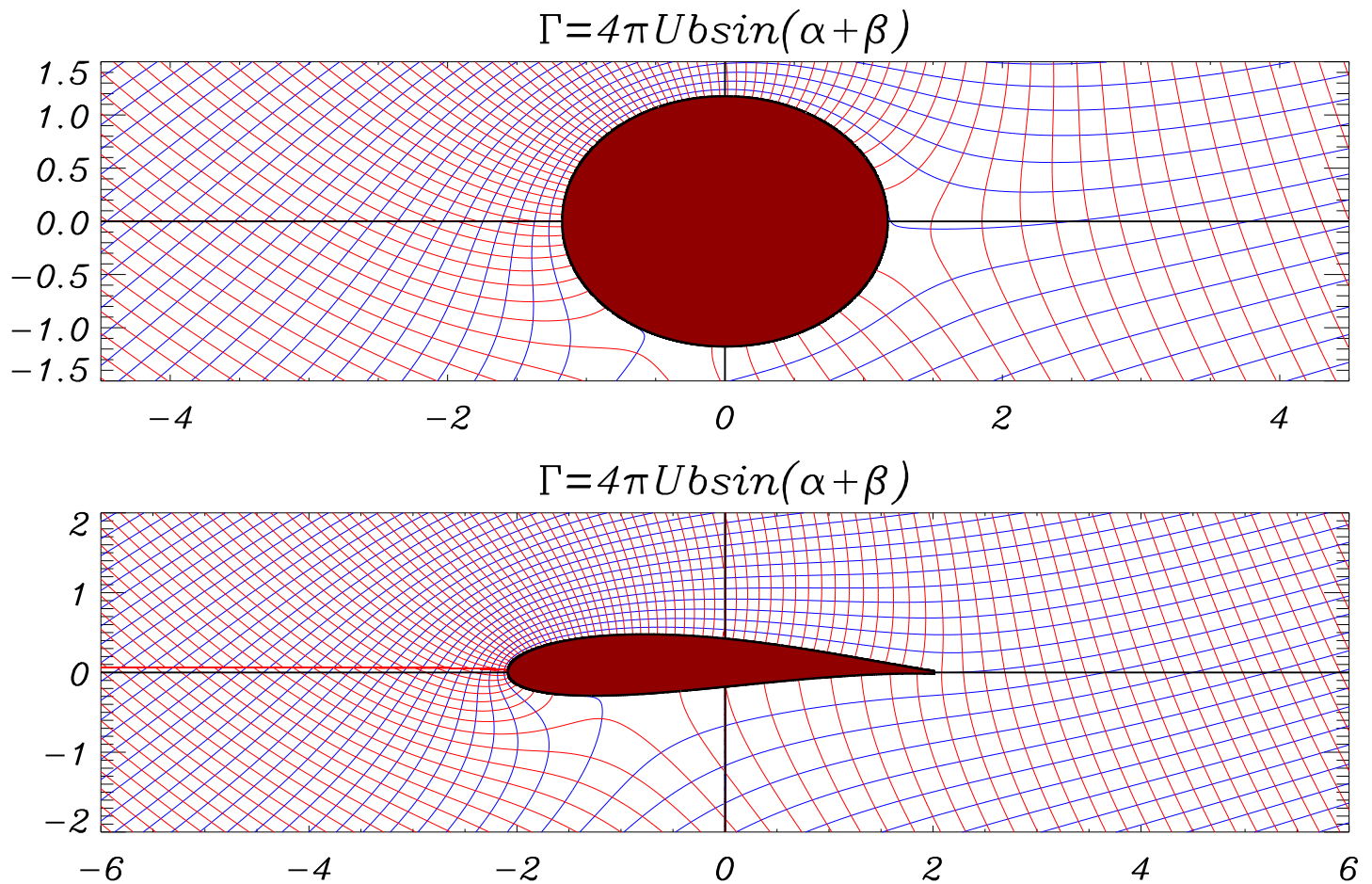
$$\mathcal{W}(w) = U_\infty \left( w e^{-i\alpha} + \frac{b^2}{w} e^{i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(w) \quad ,$$

y tomando la parte real del potencial complejo, derivando respecto a  $\theta$  (expresamos  $z$  en coordenadas polares) y aplicando la condición de Kutta se llega a que el valor de circulación debe ser

$$\Gamma = -4\pi U b \sin(\alpha + \beta) \quad .$$



Tomando ese valor para la circulación graficamos las líneas de corriente (en azul) y las líneas equipotenciales (en rojo) para el caso  $\alpha = \pi/6$ .



La discontinuidad que puede observarse en las equipotenciales delante del borde de ataque del perfil alar se deben a imprecisiones de cálculo en el graficador utilizado.