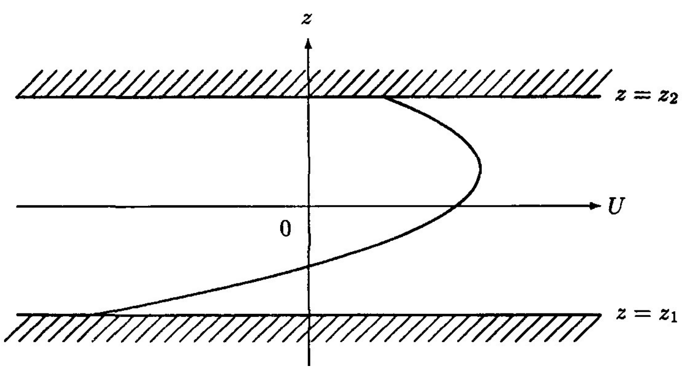
# Estructura de la Materia 1 – Práctica 5

En esta guía analizaremos la estabilidad de flujos sencillos, en todos los casos trataremos flujos plano-paralelos que son soluciones estacionarias de la ecuación de Euler (volvemos a los casos en que podemos despreciar los efectos viscosos). Hasta este momento del curso nos dedicamos a encontrar soluciones de la ecuación de Euler (o de Navier-Stokes en el caso de fluidos viscosos) para diferentes configuraciones, sin preguntarnos nada sobre la estabilidad de los campos de velocidades obtenidos. Es decir, hasta ahora no nos cuestionamos que ocurriría con estas soluciones si las sometemos a una perturbación. Un flujo que es solución de la ecuación de Euler que ante una perturbación se desetabiliza va a ser un flujo que difícilmente pueda presentarse en la naturaleza ya que su existencia sólo será posible bajo condiciones muy controladas.




Con la idea de fijar ideas y de no complicar demasiado el tratamiento matemático, como ya anticipamos restringiremos el análisis en esta guía a flujos plano paralelos ideales e incompresibles, aunque la inclusión de efectos viscosos tampoco complica mucho más el análisis de estabilidad. En la figura se muestra un caso genérico de los que analizaremos, un campo de velocidades "base" de la forma

$$\vec{v} = U(z)\hat{x} \quad ,$$

donde tenemos simetría de translación en $\hat{y}$. Sobre este campo de velocidades, solución de la ecuación de Euler para una dada configuración, agregamos una perturbación que conserva la simetría de translación en $\hat{y}$, como se explicó en la clase teórica

$$\begin{cases} u_x &= U(z) + \delta u_x(x,z,t) \\ \\ u_z &= \delta u_z(x,z,t) \\ \\ p &= p_0 + \delta p(x,z,t) \end{cases} \quad .$$

Considerando que tenemos un flujo plano y con la condición de incompresibilidad, se puede definir para el campo de perturbación una función de corriente $\psi(x,z,t)$ tal que

$$\vec{\nabla}\psi \times (-\hat{y}) = \delta u_x \hat{x} + \delta u_z \hat{z} \quad .$$

Podemos desarrollar la función de corriente de la perturbación en modos normales que se propagan en $\hat{x}$ y con amplitud dependiente de la coordenada $z$

$$\psi(x,z,t) = \phi(z)\, e^{i(kx-\omega t)} = \phi(z)\, e^{ik(x-ct)} \quad ,$$

donde expresamos la perturbación en función de la frecuencia del modo o de su velocidad de propagación. Como se mostró en la clase teórica, considerando la ecuación de Euler a primer orden en las perturbaciones, se llega a la ecuación de Rayleigh para la perturbación

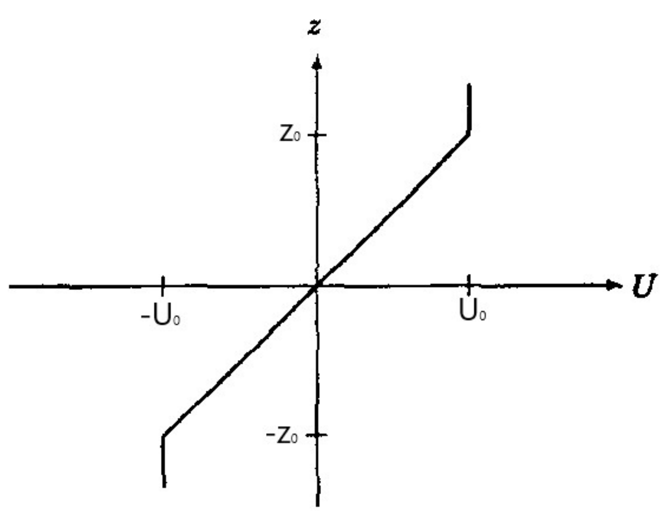
$$\phi'' - k^2\phi - \frac{U''\phi}{U-c} = 0 \quad ,$$

donde el primado significa derivación respecto de la coordenada $z$. Esta es una ecuación diferencial ordinaria para $\phi(z)$ pero no es a coeficientes constantes, lo que en general no permitirá obtener una solución analítica para $\phi(z)$. En el caso en que el campo de velocidades base $U(z)$ sea una función lineal o esté definida a tramos como un empalme de funciones lineales, el último término se anulará y tendremos que $\phi(z)$ será de la forma

$$\phi(z) = A\, e^{kz} + B\, e^{-kz} \quad .$$

Para flujos básicos específicos que no sean lineales en general hay que usar métodos numéricos para analizar la estabilidad o no de los mismos. Los análisis de estabilidad de los perfiles lineales constituyen casi exclusivamente los casos en que el tratamiento puede hacerse analíticamente, y no sólo son útiles desde el punto de vista pedagógico, si no que otros perfiles pueden aproximarse empalmando funciones lineales.

Es por ello que en los análisis de estabilidad puramente analíticos en general se consideran flujos $U(z)$ definidos como funciones lineales a trozos. Para cada uno de estos trozos en que se encuentra dividido el dominio completo del fluido tendremos definida una función $\phi(z)$ diferente, que debe cumplir ciertas condiciones de empalme. Si $z_0$ es un punto donde tenemos el empalme entre dos de las funciones lineales que definen a $U(z)$, se tendrá para $\phi(z)$




$$\frac{\phi_1(z_0)}{U_1(z_0)-c} = \frac{\phi_2(z_0)}{U_2(z_0)-c}$$

$$\rho_1[U_1'(z_0)\phi_1(z_0) - (U_1(z_0)-c)\phi_1'(z_0)] = \rho_2[U_2'(z_0)\phi_2(z_0) - (U_2(z_0)-c)\phi_2'(z_0)] \quad ,$$

estas condiciones se obtienen al pedir que la velocidad sea continua en la interfaz y que también lo sea la presión. Veamos que en la segunda condición se tienen densidades $\rho_1$ y $\rho_2$, por lo que la interfaz efectivamente puede ser entre dos fluidos diferentes, no sólo la separación en la forma funcional del campo de velocidades base. Se tendrán además para $\phi(z)$ las condiciones de contorno que correspondan debido a la presencia de contornos sólidos o para evitar que la función diverja si el dominio se extiende hacia el infinito.

Estas condiciones de contorno y de empalme en conjunto nos van a permitir establecer una relación de dispersión

$$\omega = \omega(k) \quad ,$$

y en general $\omega$ presentará una parte real y otra imaginaria. De la forma que tiene la función corriente de la perturbación (el modo $k$)

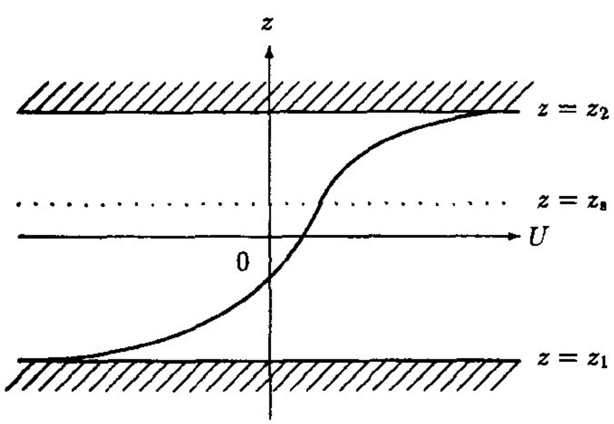
$$\psi_k \propto \phi(z)\, e^{ikx}\, e^{-i\omega t} \quad ,$$

vemos que si $\Im\{\omega\} \equiv \omega_i > 0$ entonces la perturbación crecerá indefinidamente con el tiempo, dando lugar a una inestabilidad.

Un resultado importante cuando se analiza bajo qué condiciones puede desarrollarse una inestabilidad, es la condición de Rayleigh, dada por

$$U'' = 0 \quad ,$$

que es una condición necesaria para que se desarrolle una inestabilidad (aunque no suficiente). Una condición más fuerte que la de Rayleigh para la inestabilidad la dio Fiøjfort en 1950, si $z_s$ es tal que $U''(z_s) = 0$ entonces una condición necesaria para la inestabilidad es




$$U''[U - U(z_s)] < 0 \quad .$$

Por ejemplo, para el flujo de la figura el criterio de Rayleigh dice que es posible que se desarrolle una inestabilidad, pero sin embargo el criterio de Fiøjfort, que es más restrictivo, deja afuera esta posibilidad.

Consideremos ahora un ejemplo concreto desarrollando uno de los ejercicios de la guía, para ver cómo trabajamos con las condiciones de contorno y de empalme para $\phi(z)$.

# Problema 3

$$U(z) = \begin{cases} U_0 & z > L \\ \\ U_0\,\frac{z}{L} & -L \leq z \leq L \\ \\ -U_0 & z < -L \end{cases}$$

Nos piden que analicemos la estabilidad de este perfil de velocidades. Teniendo en cuenta que el perfil está dado por el empalme de funciones lineales y constantes, en todo el dominio $U'' = 0$ y $\phi(z)$ estará dada por una suma de exponenciales

$$\phi(z) = \begin{cases} A\,e^{-kz} & z > L \\ \\ B\,e^{-kz} + C\,e^{kz} & -L \leq z \leq L \\ \\ D\,e^{kz} & z < -L \end{cases} \quad ,$$

donde ya usamos la condición de que $\phi(z)$ no diverja en $\pm\infty$. Ahora además pedimos continuidad de la presión y de $v_z$ en $z = \pm L$

$$\Delta[\phi U' - \phi'(U - c)]\big|_{z=\pm L} = 0$$

$$\Delta\left[\frac{\phi}{U - c}\right]\Bigg|_{z=\pm L} = 0 \quad ,$$

que al tener en cuenta la forma de $\phi(z)$ da las ecuaciones

$$\begin{aligned} (U_0 - c)kAe^{-kL} &= \left[\tfrac{U_0}{L} + (U_0 - c)k\right] Be^{-kL} + \left[\tfrac{U_0}{L} - (U_0 - c)k\right] Ce^{kL} \\ \\ Ae^{-kL} &= Be^{-kL} + Ce^{kL} \\ \\ \left[\tfrac{U_0}{L} - (U_0 + c)k\right] Be^{kL} + \left[\tfrac{U_0}{L} + (U_0 + c)k\right] Ce^{-kL} &= (U_0 + c)kDe^{-kL} \\ \\ Be^{kL} + Ce^{-kL} &= De^{-kL} \end{aligned}$$

En realidad no nos interesa hallar las constantes $A$, $B$, $C$ y $D$ si no encontrar la relación de dispersión $\omega(k)$. Además como la solución trivial del sistema de ecuaciones no es lo que estamos buscando, el sistema debe ser linealmente dependiente. Esto lo podemos expresar como

$$\begin{vmatrix} -(U_0-c)k & \left[\frac{U_0}{L}+(U_0-c)k\right] & \left[\frac{U_0}{L}-(U_0-c)k\right]e^{2kL} & 0 \\ -1 & 1 & e^{2kL} & 0 \\ 0 & \left[\frac{U_0}{L}-(U_0+c)k\right]e^{2kL} & \left[\frac{U_0}{L}+(U_0+c)k\right] & -(U_0+c)k \\ 0 & e^{2kL} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

que nos permite plantear una ecuación en función de $c = \omega/k$, $k$ y los parámetros $U_0$ y $L$. Desarrollando el determinante y luego de trabajar un poco con esta expresión podemos llegar a la ecuación

$$-e^{-4kL}\frac{U_0^2}{L^2} + 4k^2(U_0^2 - c^2) + \frac{U_0^2}{L^2} - \frac{4U_0^2 k}{L} = 0 \quad ,$$

de donde se obtiene

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{U_0}{2kL}\right)^2 (1 - 2kL - e^{-2kL})(1 - 2kL + e^{-2kL}) \quad .$$

Ahora todo se reduce a estudiar el signo de la función

$$f(x) = (1 - x - e^{-x})(1 - x + e^{-x}) \quad ,$$

para $x > 0$. El primer factor es siempre decreciente y nulo en $x = 0$, por lo que es siempre negativo para $x > 0$. El segundo factor también es siempre decreciente pero es positivo en el origen, por lo que presenta una única raíz $x_0 \approx 1.28$.

Podremos decir que este flujo será inestable para perturbaciones con número de onda $k$ tal que $2kL < 1.28$, es decir

$$k < \frac{0.64}{L} \quad ,$$

en ese caso la perturbación crecerá indefinidamente con el tiempo.